

香港華羅庚金杯少年數學國際精英賽 2025

中國香港中一組試卷

日期：2025 年 5 月 3 日

一小時三十分鐘完卷 (14:15 pm – 15:45 pm)

比賽須知：

1. 全卷共 10 題，包括甲部填空題八題，每題 10 分；乙部解答題三題，每題 20 分，總分 140 分。
2. 參賽學生必須全部作答，乙部答案寫在答題紙上。
3. 甲部填空題無須書寫步驟及單位；乙部解答題則須寫出詳細解答過程或步驟。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器，違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有試題、答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生必須在本試卷和答題紙上填寫以下資料：編號、學生姓名及學校名稱。
(請依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

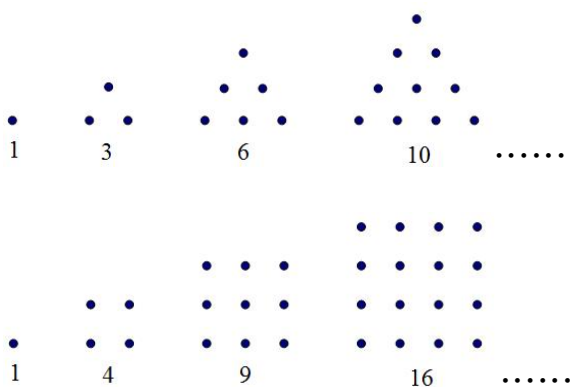
編號	學生姓名	學校名稱

填空題（共 8 題，每題 10 分，共 80 分）

1. 已知三角形兩條邊長分別為 30 和 50，第三條邊長為整數 x ，則 x 的可能值有 _____ 個，其中使得三條邊長最大公約數為 1 的有 _____ 個。

2. 求和 $1.0 + 1.01 + 1.012 + 1.0192 + 1.01992 + \cdots + 1.0\underbrace{199\cdots 92}_{11\text{個}9} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 下圖分別表示“三角形數”和“正方形數”的前幾個數所對應的圖形，由左至右是第一個、第二個、第三個及第四個圖案：

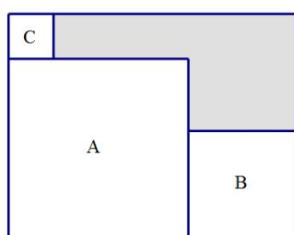


已知某兩個相鄰“三角形數”的和與某兩個相鄰“正方形數”的差相同，並且為同一個 300 與 400 之間的整數。那麼這兩個“三角形數”分別是第 _____，_____ 個；而這兩個“正方形數”分別是第 _____，_____ 個。

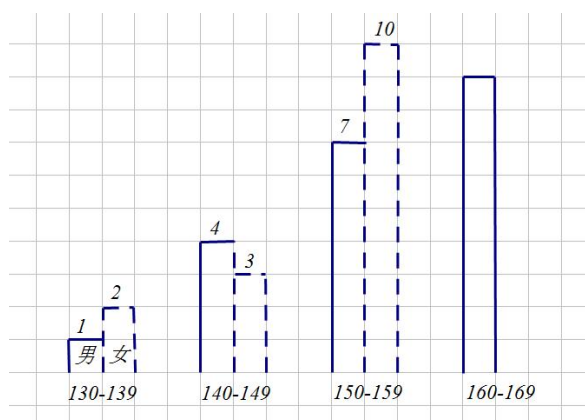
4. 一個兩位數 \overline{AB} ，中間插入一個數 C 後得到的三位數 \overline{ACB} 比 \overline{AB} 大 230，那麼 $C + 14$ 的個位數為 _____ 。

5. 如果 a, b, c, d 都是非零整數，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ ， $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ ， $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a}$ ，則 $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} + \frac{6}{c} + \frac{6}{d}$ 的最大值為 _____。

6. 如圖，大長方形的面積在 4000 至 12000 之間，它的內部有三個邊長是整數的正方形，正方形 B 的邊長是長方形長的 $\frac{3}{8}$ ，正方形 C 的邊長是長方形寬的 $\frac{1}{5}$ ，那麼圖中陰影部分的面積是 _____。



7. 下圖是一張沒有完成的統計圖，描述了全班 41 名同學的身高情況，已知班上沒有身高超過 169cm 的同學；從高到低排，男生 A 在男生中排在第 5 位，女生 B 在女生中排在第 5 位。那麼 B 同學的身高最多是 _____ cm；若 B 同學排在全班第 7 位，則 A 同學排在全班第 _____ 位；若 A 同學比 B 同學高，則全班從高到低排隊時，A 同學與 B 同學之間最多有 _____ 位同學。



8. 不改變四個數字 1,2,3,4 的先後位置，進行任意加、減、乘、除四則運算(數位之間可以添加括弧，不能添加正負號)，這樣會得到很多不同的結果。若 a 是 2,4,6,8,10 其中之一，而 a 、 $\frac{1}{a}$ 、 $-a$ 及 $-\frac{1}{a}$ 都在運算結果中。那麼，所有這樣的 a 從小到大依次寫出是 _____。

提示：符合規則的運算，例如有 $(1 + (2 + 3)) + 4 = 10$ ， $((1 \times 2) - 3) \div 4 = -\frac{1}{4}$ ， $(1 \times 2) \div (3 \times 4) = \frac{1}{6}$ ， $1 - ((2 + 3) + 4) = -8$ ， $1 + (2 + (3 - 4)) = 2$ 等等。

而 $(2 - 3) \div (1 + 4)$ 不符合運算規則，因為改變了四個數字的先後位置。

$-1 \times (2 + 3 + 4)$ ， $1 \times (-2 + 3 + 4)$ 都不符合運算規則，因為在數位之間添加了正負號。

解答題 (共 3 題, 每題 20 分, 共 60 分)

1. 對任意兩個實數 x, y ，定義它們的“星積”運算為

$$x * y = x + y - xy$$

其中的加、減及乘法是通常實數的運算。

(a) 證明： $1 - x * y = (1 - x)(1 - y)$

(b) 由(a)的結果，證明：星積運算滿足結合律，即對任意三個實數 x, y, z 有

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

2. 已知數表 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，定義變換：任選一組 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ，對於 A 的在第 i 行和第 j 列上的 5 個數，將每個數同時加上 1 或者減去 1，餘下的 4 個數不變，得到一個新數表。對於得到的新的數表，還可以進行變換。那麼將 A 連續進行多次變換，是否可能得到 B ？說明理由。

3. 在數的 10 進制表示中，由於 $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{10^6} \times \frac{1}{7}$ ，因此

$\frac{1}{7} = 0.142857 + 0.000000142857 + \cdots = 0.142857142857\cdots = 0.14285\dot{7}$ ，稱 $0.14285\dot{7}$ 是一個以 142857 為循環節的無窮循環小數。在數的 7 進制表示中，也有類似的分數 $\frac{1}{5}$ ，可以化為四個數碼作為迴圈節的無窮循環小數。請寫出 $\frac{1}{5}$ 在 7 進制下化為無窮循環小數的循環節。

全卷完