

# 第十屆全國“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

## 決賽試題答案，初一組

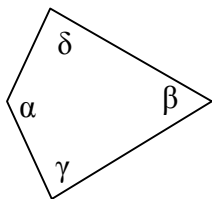
### 一. 填空(每題 10 分，共 80 分)

題號	答案	題號	答案
1	-80, -1	5	9
2	$\frac{55}{97}$	6	$\frac{5}{3}$
3	84	7	20, 45
4	2	8	14

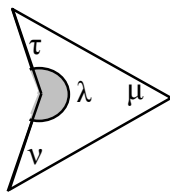
【評分參考】一題中有兩空，每空5分。

### 二. 解答下列各題，要求寫出簡要過程(每題10分，共40分)

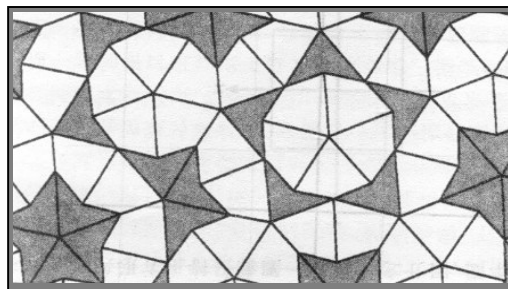
9 解：



風箏形



鏢形



① 如圖案所示， $\gamma = \delta$ ，5 個風箏形組成一個正 10 邊形，所以，

$$\alpha = (10 - 2) \times 180 \div 10 = 8 \times 18 = 144 \text{ 度，}$$

$$5\beta = 360 \text{ (度)，} \beta = 72 \text{ (度)。}$$

風箏形是個四邊形，內角和是 360 度，所以， $\gamma = (360 - 144 - 72) \div 2 = 72 \text{ (度)}$ 。

② 如圖案所示，鏢形中角  $\lambda$  和風箏形中的角  $\alpha$  組成圓周角，角  $\nu$  和角  $\tau$  都是風箏形中的  $\alpha$  的補角，所以

$$\lambda = 360 - 144 = 216 \text{ (度)，} \tau = \nu = 180 - 144 = 36 \text{ (度)。}$$

在圖案中，鏢形和兩個風箏形組成一個更大的風箏形，所以， $\mu = 72 \text{ (度)}$ 。

答：在風箏形中，有一個是鈍角，是 144 度，其他三個角都是 72 度。在鏢形中，有二個角相等，是 36 度，有一個角是優角，是 216 度，另一個角是 72 度。

【說明】在正式出版試題解答時，將給出本題  $\gamma = \delta$ ，5 個風箏形拼成的圖形是一個正 10 邊形的嚴格的證明。

【評分參考】角度正確，6 分；理由正確，4 分。

10 解答：由已知條件，

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{1}{c},$$

於是有，

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{1+a^4} + \frac{a^4}{a^4+1} = 1,$$

所以，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+y^4} + \frac{1}{1+z^4} \\ &= \left( \frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+x^4} \right) + \left( \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+y^4} \right) + \left( \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+z^4} \right) \\ &= 3. \end{aligned}$$

【評分參考】答案正確，6分；過程正確，4分。

11 解答：

① 設丙運往甲  $x$  噸，則丙運往乙  $(100-x)$  噸，丁運往甲地  $(90-x)$  噸，丁運往乙地  $60-(90-x)=(x-30)$  噸。設丙運往甲的每噸運費為  $c$ ，則丙運往乙的每噸運費為  $\frac{1}{2}c$ ，

丁運往甲每噸運費  $\frac{10}{17}c$ ，丁運往乙每噸運費  $\frac{2}{3} \times \frac{10}{17}c$ ；

② 則整個的運費為：

$$\begin{aligned} & cx + \frac{1}{2} \times c(100-x) + \frac{10}{17} \times c(90-x) + \frac{2}{3} \times \frac{10}{17} c(x-30) \\ &= \left( 50c + \frac{900}{17}c - \frac{200}{17}c \right) + \left( cx - \frac{1}{2}cx - \frac{10}{17}cx + \frac{20}{51}cx \right) \\ &= c \left( \frac{1550}{17} + \frac{31}{102}x \right); \end{aligned}$$

③ 設運費  $c$  不等於 0，否則不論怎樣調撥，總運費為 0。設  $c > 0$ ，故  $x$  取值越小，總費用越小。由於  $x-30 \geq 0$ ，故  $x \geq 30$ 。取  $x=30$  使總運費最少。

④ 調撥方案如下：

	運往甲	運往乙
由丙地	30 噸	70 噸
由丁地	60 噸	0 噸

【評分參考】①、②和③各 3 分，④1 分。

12 解：設太平洋號向北冰洋號第一次發出信號時，兩艘潛艇相距  $S$  米，北冰洋號潛航的速度是每秒  $v$  米，太平洋號的航行速度是每秒 15 米。則有：

① 從太平洋號第一次發出的聲波傳到北冰洋號的時間是  $\frac{S}{1185-v}$  (秒)；

② 當第一個聲波傳到北冰洋號時，兩艘潛艇相距的距離是

$$S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15) \text{ (米);}$$

③從太平洋號第一次發出聲波到探測到第一個返回聲波之間的時間是

$$\frac{S}{1185 - v} + \frac{S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} \text{ (秒);}$$

④當太平洋號第二次發出聲波時，兩艘潛艇相距的距離是  $S + 2 \times (v - 15)$  (米);

⑤類似，從太平洋號第二次發出聲波到探測到第二個返回聲波之間的時間是

$$\frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} + \frac{S + 2 \times (v - 15) + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} \text{ (秒);}$$

⑥既然太平洋號第 1 次和第 2 次探測到北冰洋號反射的聲波的時間間隔是 2.01 秒，則可列解方程：

$$2 + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} + \frac{S + 2 \times (v - 15) + \frac{S + 2 \times (v - 15)}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15}$$

$$- \frac{S}{1185 - v} - \frac{S + \frac{S}{1185 - v} \times (v - 15)}{1185 + 15} = \frac{201}{100},$$

$$395 \times (v - 15) = 1185 - v$$

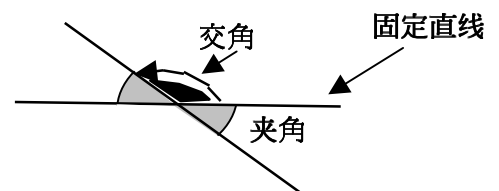
$$v = \frac{395}{22} = 17 \frac{21}{22} \text{ (米/秒)} = 64 \frac{10}{11} \text{ (千米/小時)} \approx 65 \text{ (千米/小時)}。$$

答：北冰洋號潛航的速度是每小時 65 千米。

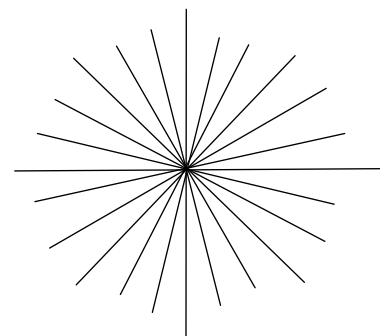
【評分參考】：⑥正確，10 分，計算錯誤，扣 2 分；⑥不正確，若①—⑤正確，5 分。

### 三. 解答下列各題，要求寫出詳細過程(每題 15 分，共 30 分)

13 解：① 固定平面上的一條直線，其他直線與此條固定直線的交角自這條固定直線起逆時針計算，只能是  $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $75^\circ$ 、 $90^\circ$ 、 $105^\circ$ 、 $120^\circ$ 、 $135^\circ$ 、 $150^\circ$ 、 $165^\circ$  十一種角度之一，所以，平面上最多有 12 條直線。否則，必有兩條直線平行。



② 如右下圖，將所有直線做平行移動，使它們交於同一個點，這樣的平行移動顯然不改變兩條直線的“夾角”。無妨設其中一條直線水準，從水準直線開始，逆時針將 12 條直線分別記為第一條、第二條、……和第十二條直線。



(1) 第二條至第十二條直線與第一條直線的“夾角”和

是：

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45+30+15=540 \text{ (度)};$$

(2) 第三條至第十二條直線與第二條直線相交的“夾角”和是：

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45+30=(540-15) \text{ (度)};$$

(3) 第四條至第十二條直線與第三條直線相交的“夾角”和是：

$$15+30+45+60+75+90+75+60+45=(540-15-30) \text{ (度)};$$

……；

(10) 第十一條和第十二條直線與第十條直線相交的“夾角”和是： $(30+15)$  (度)；

(11) 第十二條直線與第十一條直線相交的“夾角”和是： $15$  (度)；

③ 將(2)和(11)、(3)和(10)、(4)和(9)、(5)和(8)、(6)和(7)配對，得到所有的“夾角”之和是  $6 \times 540 = 3240$  (度)。

**【評分參考】**：第 1 問答案正確，給 5 分；第 2 問中，能完成②，給 8 分；能求出“夾角的總和”，即完成③，給 2 分。

14 解：

① 求出這桶漆可以塗色  $14 \times 6^2 \times \pi \times 72$  平方釐米；

② 設切割出的小正方體的棱長是  $m$  釐米，總的表面面積就是  $6m^2$  平方釐米， $m$  應當是正整數；長方體的體積是  $36 \times 54 \times 72$  立方釐米，所切割出的小正方體是  $36 \times 54 \times 72 \div m^3$  個；所有切割出的小正方體總的表面面積是

$$6m^2 \times 36 \times 54 \times 72 \div m^3 \text{ (平方釐米)};$$

③ 爲了確保這桶漆可以將所有的小正方體的表面染上顏色，應當有不等式：

$$14 \times 6^2 \times \pi \times 72 \geq 6m^2 \times 36 \times 54 \times 72 \div m^3;$$

解上面不等式：

$$14 \times 6^2 \times \pi \times 72 \geq 6 \times 36 \times 54 \times 72 \div m;$$

$$m \geq \frac{6 \times 36 \times 54 \times 72}{14 \times 36 \times \pi \times 72} = \frac{162}{7 \times \pi} > \frac{162}{7 \times 3.15}.$$

④ 因爲  $m$  必須是 36、54 和 72 的公約數，即所取的值只能是 1、2、3、6、9、18 之一。並且  $m$  的數值越小，所切割出的正方體就越多。經驗算，

$$9 > \frac{162}{7 \times \pi} > 6,$$

⑤ 所以， $m=9$ ；將長方體切割成一些棱長相同的小正方體的個數是

$$36 \times 54 \times 72 \div 9^3 = 192 \text{ (個)}.$$

答：最多能將這個長方體切割成 192 個相同的、棱長是 9 釐米的小正方體。

**【評分參考】**：每步 3 分。