

第十一屆全國“華羅庚金杯”少年數學邀請賽

決賽參考答案（小學組）

一. 填空(每題 10 分，共 80 分)

題號	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	0.1	$\frac{15}{8}$	3	17	7018	127	5	17

二. 解答下列各題, 要求寫出簡要過程(每題10分，共40分)

9 解: ① 月牙形 $ADBEA$ (陰影部分) 的面積

=半圓 \widehat{ABD} 的面積 + $\triangle ABC$ 的面積 - 扇形 \widehat{CAEBC} 的面積

② 月牙形 $ADBEA$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 + 25 - \frac{1}{4} \times \pi \times 50 = 25 \text{ 平方釐米.}$$

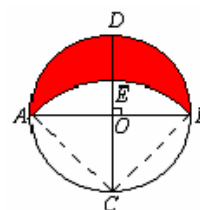


圖 4

答：月牙形 $ADBEA$ 的面積是 25 平方釐米.

評分參考：①能判斷陰影部分的面積的組成（4分）；② 計算半圓 ABD 的面積（2分）；計算三角形 ABC 的面積（2分）；計算 $AC^2 = 50$ （1分）；計算扇形 \widehat{CAEBC} 的面積（1分）；或有②給 10 分，僅有正確答案給 5 分.

10 解：① 甲乙丙三隻螞蟻的速度之比為 8:6:5，所以，當它們首次同時回到出發點時，甲運動 8 圈，乙運動 6 圈.

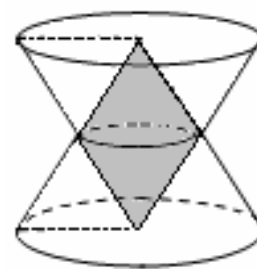
② 螞蟻甲比螞蟻乙多運動了 1 圈，就追上螞蟻乙 1 次，所以，甲一共追上乙 2 次.

答：當三隻螞蟻爬行結束時，甲追上乙 2 次.

評分參考：①能計算或判斷出當它們首次同時回到出發點時，螞蟻甲和乙爬行的圈數（6分）. ② 正確計算或判斷出甲追上乙的 2 次數（4分）. 僅有正確答案給 5 分.

11 解：①設三角形 BCO 以 CD 為軸旋轉一周所得到的立

體的體積是 S ， S 等於高為 10 釐米，底面半徑是 6 釐米的圓錐的體積減去 2 個高為 5 釐米，底面半徑是 3 釐米的圓錐的體積。



②即：

$$S = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 10 \times \pi - 2 \times \frac{1}{3} \times 3^2 \times 5 \times \pi = 90\pi,$$

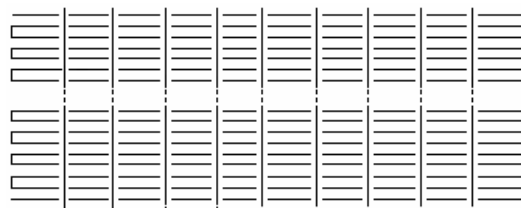
$$2S = 180\pi = 565.2 \text{ (立方釐米)}.$$

答：體積是 565.2 立方釐米。

評分參考：①能判斷出旋轉所得到的立體的形狀或畫出右圖（5分）；② 正確計算圓錐的體積（5分）。或有②給 10分，僅有正確答案給 5分。

12 解：

① 10 次對折後，得到的是 1024 條線並列的線束。



② 用剪刀將得到的線束剪成 10 等分，除去兩端，中間的 8 等分的線段都是較短的線段，共有 8×1024 根。

③ 另外，剪下的兩端，其中，有一端，有 2 條短的線段。餘下 $(2 \times 1024 - 2)$ 條線，每兩條構成 1 條線段。所以，較長的線段有 $1024 - 1 = 1023$ 根，較短的線段共有 $8 \times 1024 + 2 = 8194$ 根。

答：較長的線段有 $1024 - 1 = 1023$ 根，較短的線段共有 $8 \times 1024 + 2 = 8194$ 根。

評分參考：① 4分；② 3分；③ 3分。僅有正確答案給 6分。

三. 解答下列各題, 要求寫出詳細過程 (每題15分, 共30分)

13. 解：① 因為 $23 \times 28 = 644$ ，

② 設這串連續自然數的起始的數是 m ，不同漢字所對應的自然數依次是： $m, m+1, \dots, m+23$ ；設其中“分”字對應的自然數是 $m+x$ ，“是”字對應 $m+a$ ，“一”字對應 $m+b$ 。既然要求“分”字對應的自然數盡可能大，可以要求 $23 \geq x > a > b \geq 0$ 。

詩文中“分、是”各出現 2 次，“一”出現 3 次，其他漢字只出現 1 次，則有

$$\frac{(m+m+23)\times 24}{2} + m + x + m + a + 2(m+b) = 644,$$

即 $28m + 276 + (a+2b) + x = 644, \quad 28m = 368 - x - (a+2b)$

③ $m = \frac{368 - x - (a+2b)}{28}, \quad m + x = \frac{368 + 27x - (a+2b)}{28},$ 但是，

$$23 \geq x, b \geq 0, a + b \geq 1 + 0, a + 2b = a + b + b \geq 1.$$

所以，

$$m + x = \frac{368 + 27x - (a+2b)}{28} \leq \frac{368 + 27 \times 23 - 1}{28} < 35.29.$$

取 $m=12, x=23, a=9, b=0$ (或 $a=5, b=2$ 或 $a=1, b=4$)，得到滿足條件的解，其中“分”對應的自然數是 35.

答：“分”對應的自然數的最大可能值是 35.

評分參考：① 能計算詩文代表的自然數的總和（3分）；② 能列出或判斷出關係式 $28m=368-x-(a+2b)$ （6分）；第③步是技巧，共 6分. 建議按解答過程給分，思路正確，建議給適當分數. 僅有正確答案給 6分.

14. 解:

① 紅線將木棍分成 m 等份，每等份長是 $\frac{L}{m}$ ；黑線將木棍分成 n 等份，每等份

長是 $\frac{L}{n}$ ；則自左端起，長木棍上第 k 條紅線和第 l 條黑線重合，則

$$\frac{kL}{m} = \frac{lL}{n}, \text{ 或 } \frac{n}{m} = \frac{l}{k}. \quad (*)$$

反之，如果第 k 條紅線到左端的距離為 $\frac{k}{m}$ ，第 l 條黑線到左端的距離為 $\frac{l}{n}$ ，且 (*)

成立，則第 k 條紅線與第 l 條黑線重合. 設最大公約數

$$(m, n) = d, \quad m = dm_1, \quad n = dn_1, \quad (m_1, n_1) = 1.$$

那麼，當 $l = in_1, \quad k = im_1, \quad 1 = 1, 2, 3, \dots, d-1$ 時，

$$\frac{l}{k} = \frac{in_1}{im_1} = \frac{n_1}{m_1} = \frac{n}{m}.$$

木棍上紅色刻度線與黑色刻度線重合的條數是 x ，因此， $x = d - 1$ 。 $x + 1$ 是 m 和 n 的最大公約數。

② 紅線與黑線重合的刻度線是 $(m, n) - 1$ 條，則木棍上刻度線的總數是：

$$(m-1) + (n-1) - ((m, n) - 1) = m + n - (m, n) - 1. (\text{重合的線看作 1 條})$$

③ 按這些刻度線鋸斷長木棍，可以得到 170 根長短不等的小棍，所以

$$m + n - (m, n) = 170. \quad (1)$$

④ 長木棍上不和紅色刻度線重合的黑色刻度線的條數是

$$n - 1 - ((m, n) - 1) = n - (m, n).$$

由於黑色刻度線少，紅色刻度線多，兩條相鄰的紅線的距離要小於兩條相鄰的黑線的距離。所以，兩條相鄰的紅線中間最多只有一條黑色刻度線。按紅色刻度線鋸下的 m 個小木棍中，其中 $n - (m, n)$ 個（不是位於兩端）有黑色刻度線。相鄰兩條紅色刻度線，如果中間沒有黑色刻度線，那麼按這兩條紅色刻度線鋸下來的就是最長的短棍。所以

$$m - n + (m, n) = 100. \quad (2)$$



（上圖粗線表示黑色刻度線，細的短線表示紅色刻度線）

⑤ 由 (1) + (2) 立即得到 $m=135$ 。將 $m=135$ 代入 (2)，得到

$$(135, n) = n - 35,$$

$(135, n)$ 是 n 的約數，就整除 35。因此， $(135, n)$ 是 135 和 35 的公約數，即 $(135, n) = 1$ 或 5。若 $(135, n) = 1$ ，則 $n = 36$ ， $(135, 36) = 9$ ，矛盾！若 $(135, n) = 5$ ，則 $n = 40$ ， $(135, 40) = 5$ ，滿足條件。

答： $m=135, n=40$ 。

評分參考：①判斷黑色紅色刻度線重合的條數和最大公約數的關係（6分）；②判斷木棍上黑色和紅色刻度線的總數（2分）；③導出關係式（1）（2分）；④導出關係式（2）（3分）；⑤（2分）。

特別說明：因為各題的解答未必唯一，上述解答和評分僅供參考。