# 第十四屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

## 決賽試題 A 參考答案（小學組）

一、　填空題（每小題 10 分，共 80 分）

| **題號** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **答案** | 2 | 64 | 3 | 26 | 41 | 1626 | 33 | 37 |

**二、解答下列各題** (每題 10 分，共 40 分, 要求寫出簡要過程)

9. **答案.** 在 1 和 2 之間.

**解答：** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$

$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{13})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{11})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})$

$=\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}$.

因爲 $\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}<\frac{15}{26}+\frac{14}{26}+\frac{12}{26}=\frac{41}{26}<2$，

又因爲 $\frac{15}{26}+\frac{14}{33}+\frac{12}{35}>\frac{15}{35}+\frac{14}{35}+\frac{12}{35}=\frac{41}{35}>1$，

所以六個分數 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{11}$，$\frac{1}{13}$ 的和在 1 和 2 之間.

10. **答案：** 10 月份的第一天是星期四，3、5、8、11 月有五個星期日.

**解答：** 下表列出各個月的 1 號的相關資訊：

| 月份 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 號距 1 月 1 號的天數 | 31 | 59 | 90 | 120 | 151 | 181 | 212 | 243 | 273 | 304 | 334 |
| 除以 7 的餘數 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 |
| 1 號的星期數 | 日 | 日 | 三 | 五 | 一 | 三 | 六 | 二 | 四 | 日 | 二 |

10 月 1 號與 1 月 1 號相距 273 天，273 是 7 的倍數，所以，10 月份的第一

天也是星期四.

3 月 1 號是星期日，3 月份有 31 天，所以 3 月有 5 個星期日；

5 月 3 號是星期日，5 月份有 31 天，所以 5 月有 5 個星期日；

8 月 2 號是星期日，8 月份有 31 天，所以 8 月有 5 個星期日；

11 月 1 號是星期日，11 月份有 30 天，所以 11 月有 5 個星期日.

11. **答案** 540，或 108.

**解答：**如果$b$不是 $2^2$ 的倍數，因爲$[a,b]=2^2\times3\times5$，則$a$一定是$2^2$的倍數. 由此可知$[a,c]$一定是 $2^2$ 的倍數. 但是$[a,c]=2\times3^3\times5$不是 $2^2$ 的倍數. 所以$b$是 $2^2$ 的倍數. 同理可得$c$是$3^3$的倍數. 所以$[b,c]$應被$2^2\cdot3^3$整除.

因爲$[a,b]=60$，$[a,c]=270$，所以 60 是$b$的倍數，270 是$c$的倍數.

所以$b$，$c$的最小公倍數$[b,c]$是$[60,270]$的約數.

因爲$[60,270]=2^2\cdot3^3\cdot5$，

所以$[b,c]=2^2\cdot3^3\cdot5=540$, 或$[b,c]=2^2\cdot3^3=108$.

當$a=1$，$b=60$，$c=270$時，$[a,c]=60$，$[a,c]=270$，$[b,c]=540$；

當$a=5$，$b=12$，$c=54$時，$[a,c]=60$，$[a,c]=270$，$[b,c]=108$.

12. **答案：**43.

**解答：**顯然，選的數越小，可以使選出的數的個數越多.

首先考慮從 45 個連續的奇數 1，3，5，7，…，99 中選出$n$個數，使它們的和不超過 1949.

由 1+3+5+…+（$2n-1$）$=n^2$得

$$n^2\le1949.$$

因爲$45^2=2025>1949$，且 45 個奇數的和不小於$1+3+5+\cdots+89=2025>1949$，

所以$n \le 44$.

若選取 44 個奇數，因爲偶數個奇數的和爲偶數，而 1949 爲奇數，所以不可能選取 44 個奇數，使得它們的和爲 1949.

所以$n \le 43$.

因爲$44^2 = 1936 < 1949$，$2025 - 1949 = 76$，且 76 是偶數，所以至少從 1，3，5，…，89 中刪除兩個奇數，並使它們的和爲 76. 如，去掉 1，3，5，…，89 中的兩個奇數 37 和 39，即選 1，3，…，35，41，…，87，89.

易驗證，$1+3+5+\cdots+35+41+43+\cdots+89 = 2025 - 76 = 1949$.

所以$n$的最大值爲 43.

三、解答下列各題　（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

13. **答案：$\frac{25}{16}$.**

**解答：**設三角形$OAB$的面積爲$x$，梯形的高爲$h$，則

$$\frac{1}{2}(AB+CD)h = 4.$$

因爲$AB = 5$，$CD = 3$，所以$h = 1$.

因爲$S_{\triangle ABO} + S_{\triangle CBO} = \frac{1}{2}AB \times h = \frac{5}{2}$，

所以$S_{\Delta OBC} = \frac{5}{2} - S_{\Delta OAB}$，即$S_{\Delta OBC} = \frac{5}{2} - x$.　①

同理可得$S_{\Delta OCD} = \frac{3}{2} - S_{\Delta OBC}$，

所以$S_{\Delta OCD} = x - 1$.　②

因爲$S_{\Delta OAD} + S_{\Delta OCD} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCD}$，所以$S_{\Delta OBC} = S_{\Delta OAD} = \frac{5}{2} - x$.　③

由三角形面積公式得$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OCD}}$，即$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{S_{\Delta OAD}}{S_{\Delta OCD}}$.

所以$S_{\Delta OAB} \times S_{\Delta OCD} = S_{\Delta OBC} \times S_{\Delta OAD}$　④

由①，②，③，④得$x \times (x-1) = (\frac{5}{2} - x) \times (\frac{5}{2} - x)$.

所以$x=\frac{25}{16}$，即$S_{\Delta OAB}=\frac{25}{16}$.

14. **答案：**159.

**解答：**因爲48能被3整除，所以“第十四屆”所表示的數能被3整除，即“第十四屆”的四個數字之和能被3整除.

又因爲$1+2+3+\cdots+9=45$ 能被3整除，所以“華杯賽”表示的數的數字之和也能被3整除，即“華杯賽”所代表的數能被3整除.

因爲48能被4整除，而且“祝”字是4，“賀”字是8，所以“屆”爲偶數，只能取2或6.

又“祝贺”與“華杯賽”的乘積爲四位數，所以“華”字代表的數字只能是1. 否則，即使“華杯賽”取最小的三位數爲213，$48\times213=10224$是五位數，所以取其他的三位數將更不符合要求.

（1）當“屆”取數字“2”時，則“賽”字只能是 9，此時，算式是$48\times\overline{1\text{杯}9}=\overline{\text{第十四}2}$.

因爲餘下的4個數字3,5,6,7中,只有5與10的和能被3整除,所以 “杯”字只能取5.

此時，$48\times159=7632$，符合要求.

故“華杯賽”所代表的整數是159.

（2）當“屆”取數字“6”時，則“賽”取數字“2”或“7”.

①若“賽”取數字“2”時, 此時算式是$48\times\overline{1\text{杯}2}=\overline{\text{第十四}6}$.

因爲3與3，5，7，9的和分別爲6，8，10，12， 所以“杯”可以取數位“3”或“9”.

但是$48\times132=6336$，$48\times192=9216$，顯然不符合要求.

②若“賽”取數字“7”時，此時算式是$48\times\overline{1杯7}=\overline{第十四6}$.

因爲 8 與 2，3，5，9 的和分別爲 10，11，13，17 均不能被 3 整除，所以不存在“$\overline{1杯7}$”使得等式$48\times\overline{1杯7}=\overline{第十四6}$成立.

所以“華杯賽”所代表的整數爲 159.