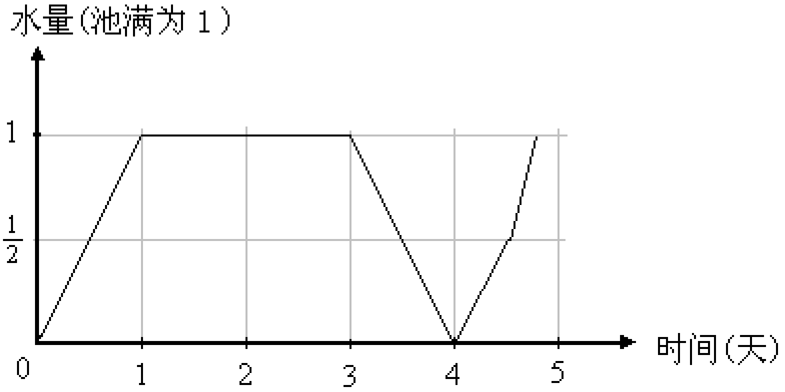
第十五屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A 參考答案（初一組）

一、填空（每題 10 分，共 120 分）

題號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	$\frac{7}{990}$	$\frac{1}{4}$	270	335	A	32	680	503	28	$\frac{26}{11}$	5

12. 解答.



二、解答下列各題（每題10分，共40分，要求寫出簡要過程）

13.答案: 不能.

解答. 假設存在 7 個整數 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 排成一圈後，滿足任 3 個相鄰數的和都等於 29. 則

$$a_1+a_2+a_3=29,\ a_2+a_3+a_4=29,\ a_3+a_4+a_5=29,\ a_4+a_5+a_6=29,$$

$$a_5+a_6+a_7=29,\ a_6+a_7+a_1=29,\ a_7+a_1+a_2=29.$$

將上述 7 式相加，得

$$3\times(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)=29\times 7.$$

所以

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\frac{29\times 7}{3}=67\frac{2}{3},$$

與 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ 爲整數矛盾! 所以不存在滿足題設要求的 7 個整數.

14. 答案: 2.

解答. 直接解方程組,

$$\begin{cases} x = \dfrac{35+4k}{41} \\ y = \dfrac{5k-28}{41} \end{cases}.$$

當

$$\begin{cases} 35+4k = 41m \\ 28-5k = 41n \end{cases} \quad (\text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 是整數}) \tag{1}$$

時方程組有整數解. 消去上面方程中的 k, 得到

$$5m+4n=7. \tag{2}$$

從(2)解得

$$\begin{cases} m = 3+4l \\ n = -2-5l \end{cases} \quad (\text{其中 } l \text{ 是整數}). \tag{3}$$

將(3)代入(1)中一個方程

$$35+4k = 123+164l,\ \ k = 22+41l.$$

解不等式

$$1910 < 22+41l < 2010,\ \ \frac{1888}{41} < l < \frac{1988}{41},\ \ 46\frac{2}{41} < l < 48\frac{20}{41}.$$

因此共有2個 k 值使原方程有整數解.

15. 答案: 49, 14. 96.5 (注. 96.5可答可不答)

解答. 因爲 p 爲質數, 所以 $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \cdots, \frac{p-1}{p}$ 爲最簡真分數, 所以

$$m = \frac{1+2+\cdots+(p-1)}{p} = \frac{p-1}{2}.$$

同理可得

$$n = \frac{q-1}{2}.$$

所以

$$(p-1)(q-1) = 2^6 \times 3.$$

首先, 因爲上式右端3的因數只有一個, 所以 p 和 q 不可能相等, 不妨設 $p>q$.

因爲

$$2^6 \times 3 = 2\times 96 = 4\times 48 = 8\times 24 = 16\times 12 = 32\times 6 = 3\times 64,$$

所以 p 和 q 可以是以下情形:

$p=97,\ q=3$, 對應的 $m+n=49$;

$p=17$, $q=13$, 對應的$m+n=14$.

16. 答案: $x=-\dfrac{80}{9}$.

解答. 當$a\ge b>0$時, 有$a[a]\ge b[b]$. 當$0>a\ge b$時, 有$a[a]\le b[b]$. 由於

$$8[8]=64<80<81=9[9],$$

可以斷言, 如果方程有正數解 x, 則$x=8+\{x\}$. 因此$(8+\{x\})\times 8=80$, $\{x\}=2$是不可能的.

另一方面,

$$-8[-8]=64<80<81=-9[-9],$$

可以斷言, 如果方程有負數解 x, 則$x=-9+\{x\}$. 因此

$$(-9+\{x\})\times(-9)=80, \quad 9\{x\}=1, \quad \{x\}=\frac{1}{9}, \quad x=-\frac{80}{9}.$$

故原方程的解爲$x=-\dfrac{80}{9}$.

三、解答下列各題(每題15分, 共30分, 要求寫出詳細過程)

17. 答案: $\dfrac{1}{3}$.

解答. 記六邊形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的面積爲 S, 圖中陰影部分的面積爲 S_1; 記 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEF$, $\triangle EFA$, $\triangle FAB$ 的面積之和爲 S_2, 由這六個三角形組成的圖形除去陰影部分的面積爲 S_3, 由題設條件可知

$$S_2=S_{ABCDEF}, \quad S_1=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}.$$

在計算 S_2時, 加了兩次 S_3, 所以 $S_2=S_1+2S_3$, 從而得

$$S_3=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}.$$

又

$$S=S_{ABCDEF}-S_1-S_3,$$

所以

$$S=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}.$$

故

$$\frac{S}{S_{ABCDEF}}=\frac{1}{3}.$$

18. 答案: $16x^2$, 或 $8x$, 或 $32x$, 或 $\frac{64}{9}$.

解答. 設所求的單項式是 ax^m, $m \geq 0$.

$9(x-1)^2-2x-5$共有 3 個不爲同類項的單項式, 如果 $m \geq 3$, 則多項式

$$9(x-1)^2-2x-5+ax^m$$

中不爲同類項的單項式有 4 項, 不可能寫爲兩個不爲同類項的單項式和的平方, 如果寫成至少有 3 項不爲同類項的單項式和的平方, 則展開後, 至少有 5 個不爲同類項的單項式, 所以, 得到 $m \leq 2$.

$$9\left(x-1\right)^2-2x-5+16x^2=\left(9+16\right)x^2-20x+4=\left(5x-2\right)^2;$$

$$9\left(x-1\right)^2-2x-5+8x=9x^2-12x+4=\left(3x-2\right)^2;$$

$$9\left(x-1\right)^2-2x-5+32x=9x^2+12x+4=\left(3x+2\right)^2;$$

$$9\left(x-1\right)^2-2x-5+\frac{64}{9}=9x^2-20x+\frac{100}{9}=\left(3x-\frac{10}{3}\right)^2;$$

所求的單項式爲$16x^2$, 或 $8x$, 或 $32x$, 或$\frac{64}{9}$, 再無其他解答.