

第十六屆華羅庚金杯少年數學邀請賽

決賽試題 A (初中組)

(時間: 2011 年 4 月 16 日 10:00~11:45)

一、填空題 (每小題 10 分, 共 120 分)

1. 邊數為 2011 的正多邊形, 共有對角線 _____ 條。
2. 利用 2、0、1、1 四個數字, 最多可以組合成 _____ 個不同的 4 位數。
3. 設 a 是自然數, 且 $17 \times a$ 的積是一個由數字 0 或 1 所組成的多位自然數, 則 a 的最小值應該是 _____。
4. 已知盒子裏有三種不同顏色的小球, 紅球佔全部的 $\frac{3}{8}$, 黃球佔全部的 $\frac{1}{6}$ 。那麼盒子裏應最少有小球 _____ 個。

5. 計算:
$$\frac{-1.2 \div \frac{1}{20}}{-1 + (-3)^3 \div (-\frac{1}{2}) \times (-1 - 16)} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

6. 算式: $\overline{\text{兔} \times \text{兔年} \times \text{吉祥如意}} = \overline{\text{兔兔兔兔兔兔}}$

中的漢字代表 0~9 的數字, 相同的漢字代表相同的數位, 不同的漢字代表不同的數位, $\overline{\text{吉祥如意}}$ 所代表的四位數是 _____。

7. 將 12 個小球放入編號為 1 至 4 的四個盒子中, 每個盒子中的小球數不小於盒子編號數, 那麼共有 _____ 種不同的放法。
8. 有一列數, 第一個數是 10, 第二個數是 20, 從第三個數開始, 每個數都是前面所有數的平均數, 那麼第 2011 個數是 _____。
9. 設 x 是有理數, $P = |3x + 6| + |x - 3| + |2x - 6| + |x - 9|$, 則 P 的最小值為 _____。
10. 將自然數 1~22 分別填在下面的“□”內 (每個“□”只能填一個數), 在形成的 11 個分數中, 分數值為整數的最多能有 _____ 個。

$$\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$$

11. 下面兩串單項式各有 2011 個單項式:

$$xy^2, x^4y^5, x^7y^8, \dots, x^{3n+1}y^{3n+2}, \dots, x^{6028}y^{6029}, x^{6031}y^{6032}$$

$$x^2y^3, x^7y^8, x^{12}y^{13}, \dots, x^{5m+2}y^{5m+3}, \dots, x^{10052}y^{10053}, x^{10057}y^{10058}$$

其中 n, m 為非負整數, 則這兩串單項式中共有 _____ 對同類項。

12. 將能被 3 整除、被 5 除餘 2、被 11 除餘 4 的所有這種正整數依照從小到大的順序排成一列，記為 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 。如果 $a_{n-1} < 2011 < a_n$ ，則 n 等於_____。

二、解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

13. 將 9 個各不相同的正整數填在 3×3 表格的格子中，一個格子填一個數，使得每個 2×2 子表格中四個數的和都恰好等於 100。求這 9 個正整數總和的最小值。

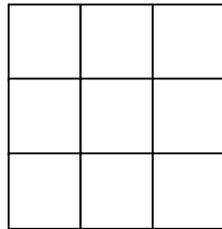


圖 1

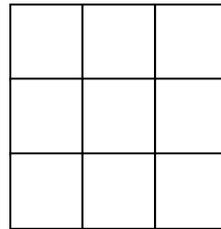
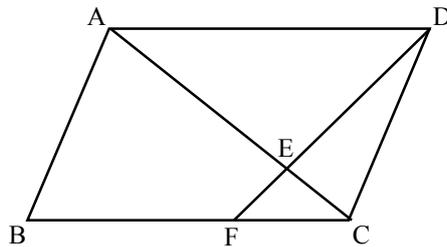


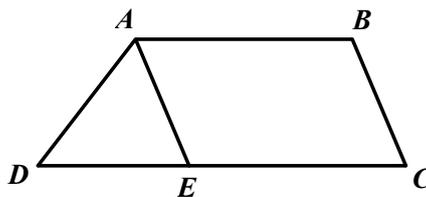
圖 2

14. 下圖中，平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 1， F 是 BC 上一點， AC 與 DF 交於 E ，已知 $\frac{BF}{FC} = 3$ ，則三角形 CEF 的面積是多少？



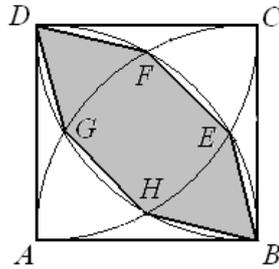
15. 設 m, n, p 為非零自然數， $m \geq n \geq p$ ，且滿足方程： $(m - \frac{8}{3})(n - \frac{8}{3})(p - \frac{8}{3}) = \frac{mnp}{27}$ 。問 p 的最大值等於多少？

16. 如圖，如果將梯形 $ABCD$ 分割成一個平行四邊形 $ABCE$ 和一個三角形 AED ， $AB = 38\frac{2}{3}$ 米， $BC = 26\frac{2}{3}$ 米， $CD = 72$ 米， $AD = 20$ 米，那麼四邊形 $ABCE$ ，三角形 AED ，梯形 $ABCD$ 的面積分別是多少平方米？



三、解答下列各題（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

17. 在邊長為 1 釐米的正方形 $ABCD$ 中，分別以 A, B, C, D 為圓心，1 釐米為半徑畫圓弧，交點 E, F, G, H ，如圖所示。求中間陰影六邊形 $BEFDGH$ 的面積。



18. 已知 $x - \frac{1}{x} = m$ ，是否存在整數 m 使得 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 為完全平方數？如果存在，求出整數 m ；若不存在，請說明理由。