

華羅庚金杯少年數學邀請賽

2018 年香港賽區決賽

中二組試卷

日期：2018 年 3 月 10 日

一小時三十分鐘完卷 (上午 10:00 至上午 11:30)

比賽須知：

1. 全卷共 14 題，滿分 150 分。包括填空題 8 道，每題 10 分；簡答題 4 道，每題 10 分；詳答題 2 道，每題 15 分。
2. 參賽學生必須全部作答，所有答案寫在答題紙上。
3. 填空題無需書寫步驟，只須填寫答案；簡答題要求寫出簡要過程；詳答題要求寫出詳細過程。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器。違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有題目，答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生在本試題和答題紙上填寫以下資料：座位編號、學生姓名、及學校名稱。
(可依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

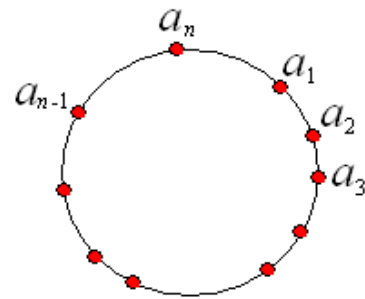
座位編號	學生姓名	學校名稱

本試卷共設 14 題，全部試題均須作答，所有答案寫在答題紙上。

一、 填空题（每小題 10 分，共 80 分）

1. 已知 $a = \sqrt{3} - 1$ ，則 $a^{2015} + 2a^{2014} - 2a^{2013}$ 的值是（_____）。

2. 如圖，圓周上順時針排列有 n 個互不相同的有理數，滿足 $a_i = a_{i-1} \times a_{i+1}$ ($i = 2, 3, 4, \dots, n$) 且 $a_n = a_{n-1} \times a_1$ 。則 $n =$ （_____）。



3. 甲、乙和丙三個車隊於某日共行駛了 21600 公里，其中甲車隊每輛車平均行駛了 325 公里，乙車隊每輛車平均行駛了 250 公里，丙車隊每輛車平均行駛了 150 公里。已知丙車隊車輛恰好是甲乙兩個車隊車輛總數的三分之一，問丙車隊最多有車（_____）輛。

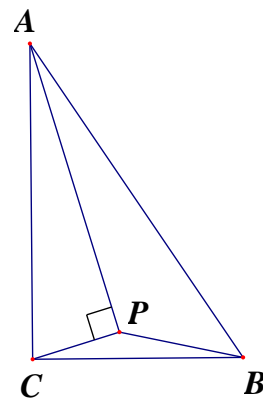
4. 在 1~10000 的自然數中，既不是完全平方數也不是完全立方數的整數的個數為（_____）。

5. 在直線 l 上有 2014 個不同的黃點，標出以這些黃點為端點的線段的中點，並將這些中點都染成紅色（若中點恰是黃點，則該黃點要改染為紅點）。設染成紅色的點至多有 m 個，至少有 n 個，則 $m =$ （_____）， $n =$ （_____）。

6. 質數 $p > 5$ ，則 336 除 $7p^4 + 5$ 的餘數是（_____）。

7. 如圖，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6, BC = 4$ 。

P 是 $\triangle ABC$ 內一點，滿足 $\angle APC = 90^\circ$ ，則 BP 的最小值為（_____）。



8. 實數 a, b, c 滿足 $a + b + c = 1$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3$ ，則

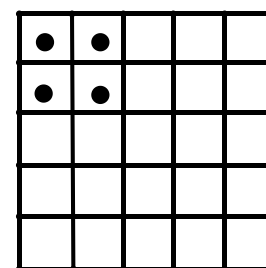
$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = \text{（_____）}。$$

二、 解答下列各題（每題 10 分，共 40 分，要求寫出簡要過程）

9. 已知： $3x + 2y \leq 7$ ， $2x - 3y \geq 2$ ，則 $x + y$ 的最大值為多少？

10. 平面上有 2015 條直線，任意兩條要麼垂直，要麼平行。那麼它們間最多可以形成多少個直角？

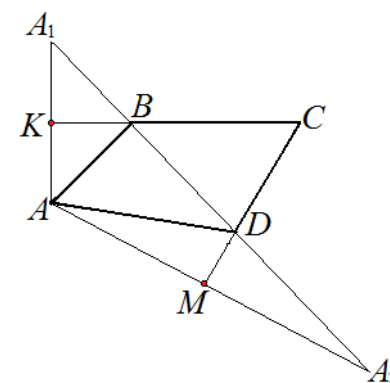
11. 把 15 個相同的棋子放入 5×5 的網格中，每個網格最多放一個，每行每列恰有 3 個棋子，共有多少種不同放法（不考慮旋轉）？



12. 從 1 至 25 的正整數中任取 a 個互不相同的數，其中必定存在兩個，小的比上大的比值小於 $2/5$ ，則 a 的最小值是多少？

三、 解答下列各題（每小題 15 分，共 30 分，要求寫出詳細過程）

13. 在凸四邊形 ABCD 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ，點 A_1 和 A_2 分別關於直線 CB 和 CD 與點 A 對稱。如果已知點 A_1 ， A_2 ，B 和 D 在一條直線上，則 $\angle BCD$ 等於多少？



14. 二次三項式 $x^2 - ax + 6a$ 可以分解因式成 $(x - u)(x - v)$ 。若 u, v 都是整數，求 a 的所有值。

-- 全卷完 --