

第二屆華羅庚杯香港中學(中一級)數學邀請賽答案

甲部：計算題 (1-12) 此部無須書寫步驟，只須填寫答案。

題 號	答 案	題 號	答 案
1	260	7	165°
2	32	8	55
3	21	9	4 或 0 或 -4
4	$\frac{8}{5}$	10	15
5	p, q 均為奇數	11	135
6	14	12	10

乙部：解答題(13-20) 此部須在答題紙上列明演算過程及答案。

$$\begin{aligned}
 13. \quad & \because |a-2| + (ab-2)^2 = 0, \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \\
 & \therefore \frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(a+2)(b+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+2006)(b+2006)} \\
 & = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2007 \times 2008} \\
 & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \\
 & = \frac{2007}{2008}
 \end{aligned}$$

14.

方程組 $\begin{cases} ax + by = -16 \\ cx + 20y = -224 \end{cases}$ 的解為 $\begin{cases} x = 8 \\ y = -10 \end{cases}$

所以, $\begin{cases} 8a - 10b = -16 & \dots\dots(1) \\ 8c - 200 = -224 \end{cases}$

由 $8c - 200 = -224 \Rightarrow c = -3$,

小明抄錯 c 得到 $\begin{cases} x = 12 \\ y = -13 \end{cases}$, $\therefore 12a - 13b = -16 \dots\dots(2)$

聯立(1), (2)解得 $a = 3, b = 4$ 。

所以, $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 4^2 + (-3)^2 = 34$

15. (1) 若 $\begin{cases} x + 5 = 0 \\ 3x + 2 \neq 0 \end{cases}$, 符合題意, 解得 $x = -5$,

(2) 若 $3x + 2 = 1$, 符合題意, 解得 $x = -\frac{1}{3}$

(3) 若 $3x + 2 = -1$ 且 $x + 5$ 為偶數時, 符合題意, 解得 $x = -1$

綜合上述的各種情況, $x = -5, -\frac{1}{3}, -1$ 。

16. (1) 經面 $AB_1 \rightarrow$ 面 BC_1 , 從 A 到 C_1 點, 則

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = 9^2 + 3^2 = 90,$$

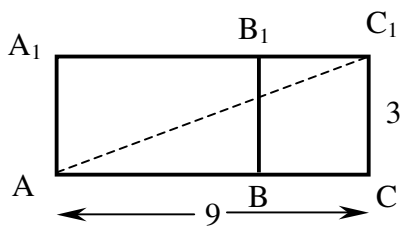
(2) 經面 $AB_1 \rightarrow$ 面 A_1C_1 , 從 A 到 C_1 點, 則

$$AC_1^2 = AB^2 + BC_1^2 = 5^2 + 7^2 = 74,$$

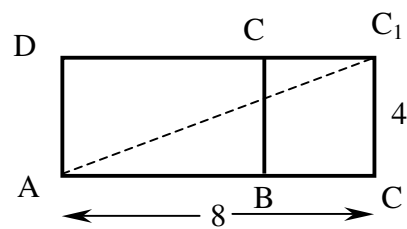
(3) 經面 $AC \rightarrow$ 面 BC_1 , 從 A 到 C_1 點, 則

$$AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2 = 8^2 + 4^2 = 80,$$

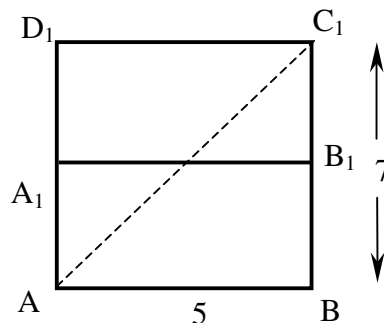
所以, 螞蟻爬行的最短距離的平方為 74。



(1)



(2)



(3)

17. 設圓 C_4 的半徑為 r ，由 $PQ = 20$ ，得 $O_2O_1 = 5$ ， $O_4O_2 = 5 + r$ ， $O_4O_1 = 10 - r$ ，
在直角 $\Delta O_1O_2O_4$ 中， $5^2 + (10 - r)^2 = (5 + r)^2$ ，

$$\text{解得 } r = \frac{10}{3}，$$

$$\text{陰影部分的面積爲 } \frac{\pi(O_1P)^2}{2} - 2 \cdot \frac{\pi(O_1O_2)^2}{2} - \pi r^2 = \frac{125\pi}{9}。$$

18. 依題意， $\frac{V_{乙}}{V_{丙}} = \frac{3}{2}$ ， $\frac{V_{甲}}{V_{乙}} = \frac{4}{3}$

$$\therefore \frac{V_{甲}}{V_{丙}} = 2$$

因爲丙比甲早出發 20 分鐘，所以甲出發 20 分鐘後追上丙。

19. 由於不管有幾個 x_i 取 0，都不影響 $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ 的值。

故不妨設有 p 個 x_i 取 1， q 個 x_i 取 -2。

$$\text{依題意：} \begin{cases} p - 2q = -17 \\ p + 4q = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 9 \end{cases}。$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 1 \times 1^3 + 9 \times (-2)^3 = -71。$$

20. 依題意，共有 12 種購買組合：3 元商品一件，5 元商品一件，3 元商品兩件，3 元一件 5 元一件，3 元商品三件，5 元商品兩件，3 元兩件 5 元一件，3 元商品四件，3 元一件 5 元兩件，3 元三件 5 元一件，3 元商品五件，5 元商品三件。
由抽屜原理可得：至少有 $2 \times 12 + 1 = 25$ （人）。