2021“华数之星”复评（二级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. $2021^2+2021^2\times2022^2+2022^2$是自然数$a$的平方，$a$=________.

解.

$2021^2+2021^2\times2022^2+2022^2=2021^2\times2022^2+2\times2021\times2022+1$

$=(2021\times2022+1)^2=4086463^2$，

所以$a=4086463$.

答案. 4086463.

2. 有 68 位同学玩游戏, 依次编号为 1, 2, 3, ⋯, 68. 开始时，所有同学排成一横排站在同一条起跑线上. 第 1 秒钟, 编号为 2 的倍数的同学往前走 1 步, 第 2 秒钟, 编号为 3 的倍数的同学往前走 1 步，第 3 秒钟, 编号为 4 的倍数的同学往前走 1 步，以此类推，67 秒钟后，编号为 18 的同学往前走了________步,

编号为________的同学往前走的步数最多.

解. 对第一个问题，由 $18=2\times3^2$ 可见18的约数一共有（1+1）×（2+1）=6 个，所以编号为 18 的同学往前走了$6-1=5$步.

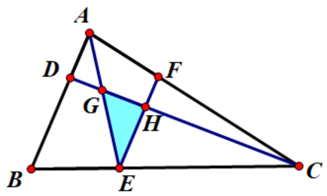
对第二个问题，依题意转化为求 68 以内因数最多的自然数n. 5 个质因数最小是 $72=2^3\times3^2$，即 n 最多有 4 个质因数． 4 个不同的质因数最小是 $2\times3\times5\times7=140$，所以$n$最多有 3 个不同的质因数. 小于 68 的自然数n有 4 个质因数且这四个质因数 3 个互不相同只有 1 个，其为$60=2^2\times3\times5$，它有因数 12

个，因数个数是最多的，所以往前走的步数最多的是编号为 60 的同学.

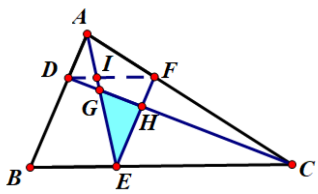
答案. 5，60.

评分标准：填对一个得 15 分，填对两个得 25 分.

3. 如图所示，在三角形 ABC 中，$CE=2BE, BD=2AD, CF=2AF$. 连接 AE, EF, CD 交成三角形 EHG，则三角形 EHG 的面积占三角形 ABC 面积的比值是________.



解法一. 连接 DF 交 AE 于点 I （如图）.



由于 $\dfrac{DI}{BE}=\dfrac{1}{3}$，有 $\dfrac{DI}{CE}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{DG}{CG}$，即

$$\frac{DG}{CH+HG}=\frac{1}{6} \tag{1}$$

而由 $\dfrac{DF}{BC}=\dfrac{1}{3}$ 有 $\dfrac{DF}{CE}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{DH}{CH}$，即

$$\frac{DG+HG}{CH}=\frac{1}{2} \tag{2}$$

由（1）和（2）得 $DG:HG:CH=3:4:14$，因此根据比例关系有

$$S_{\Delta EHG}=\frac{4}{3+4+14}S_{\Delta CDE}=\frac{4}{21}\times\frac{2}{3}S_{\Delta BCD}=\frac{4}{21}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{16}{189}S_{\Delta ABC}$$

所以比值是 $\dfrac{16}{189}$.

解法二．如原图，因为 $CE=2BE, BD=2AD, CF=2AF$，所以 $EH=\frac{2}{3}EF, HF=\frac{2}{3}AD$. 因为 $EF // AB$，所以 $\frac{EG}{EA}=\frac{EH}{EH+AD}=\frac{4}{7}$. 由鸟头定理知：$S_{\Delta EHG}=\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}S_{\Delta AEF}=\frac{4}{21}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{16}{189}S_{\Delta ABC}$.

答案. $\frac{16}{189}$.

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 从 $1,3,5,7,9$ 中任取三个不同数码，组成第一个三位数；将第一个三位数的数码倒序排列，得到第二个三位数；将第一个与第二个三位数中较大者减去较小者，得到第三个三位数；将第三个三位数的数码倒序排列，得到第四个三位数；将第三个与第四个三位数相加. 最后的和可能是什么数？请说明理由.

解. 得到结果只能是1089． 理由如下.

设第一个三位数为 $\overline{abc}=a\times100+b\times10+c$，不妨设 $a>c$，则两数之差为

$$(a-1-c)\times100+9\times10+(10+c-a),$$

第四个数为

$$(10+c-a)\times100+9\times10+(a-1-c),$$

最后两数之和为

$$(a-1-c+10+c-a)\times100+18\times10+(10+c-a+a-1-c)=900+180+9=1089.$$

答案. 得到结果只能是 1089.

评分标准. 写对1089即得 15 分；能指出1089是唯一表达再给 5 分，给出理由再给 5 分. 用字母表示三位数得出准确证明即得 15 分. 结论不正确，写出部分原因给 5 至 10 分.

5. 甲、乙、丙三支球队轮流比赛，没有平局. 规定每场比赛的负者下一场轮空，胜者与上一场轮空者比赛. 已知甲队胜 10 场，乙队胜 9 场，丙队胜 14 场，且最后一场甲队是负者. 问：甲、乙、丙队各参加了几场比赛？哪两支球队进行了第一场比赛？

解. 设甲负了 x_1 场，轮空 y_1 场；乙负了 x_2 场，轮空 y_2 场；丙负了 x_3 场，轮空 y_3 场。比赛总场数=10+9+14=33，所以，

$$x_1 + y_1 = 33 - 10 = 23, \qquad (1)$$
$$x_2 + y_2 = 33 - 9 = 24, \qquad (2)$$
$$x_3 + y_3 = 33 - 14 = 19. \qquad (3)$$

除了最后一轮外，负一场就轮空一场，而最后一轮负了比赛就停止了. 因为最后一场甲队是负者，那么它负的次数就比轮空的次数多 1，而由 $x_1 + y_1$ 为奇数可见甲队第一轮没有轮空，故 $x_1 - 1 = y_1$. 代入（1）得 $x_1 = 12, y_1 = 11$. 由此可见甲队参加了$33 - 11 = 22$ 场.

由 $x_2 + y_2$ 为偶数可知乙队负的次数就等于轮空的次数，即 $x_2 = y_2$，代入（2）得 $y_2 = 12$，由此可见乙队参加了$33 - 12 = 21$ 场.

由 $x_3 + y_3$ 为奇数可知丙队第一轮轮空，而它在最后一轮胜了，故 $x_3 + 1 = y_3$ ，代入（3）得 $y_3 = 10$，由此可见丙队参加了$33 - 10 = 23$ 场.

答案. 甲队参加了 22 场，乙队参加了 21 场，丙队参加了 23 场；甲队和乙队进行了第一场比赛.

评分标准. 甲、乙、丙队参加的场次答对一个给 10 分，答对二个再给 5 分，答对三个再给 5 分，答出第一场比赛是甲队和乙队进行给 5 分. 结论均不正确，但做出一些合理分析可给 5 至 10 分.

6. 钟面上，在一天内，时针与分针形成 125° 角的时刻有多少次？最后一次

形成 125° 角的时刻是这一天的几点几分?（几分用分数表示）

解. 对于a时b分，时针与指向 12 时之间的夹角的度数为$30a+0.5b$，分针与指向 12 时之间的夹角的度数为$6b$，当分针未超过时针时，两针之间的夹角的度数是$30a+0.5b-6b=30a-5.5b$；当分针超过时针时，两针之间的夹角的度数是$6b-30a-0.5b=5.5b-30a$.

对于分针未超过时针的情形，由方程 $30a-5.5b=125$ 解得

$b=\frac{2}{11}(30a-125)$，当$a=5,6,7,8,9,10,11,12$时，b依次为

$\frac{50}{11},\frac{110}{11},\frac{170}{11},\frac{230}{11},\frac{290}{11},\frac{350}{11},\frac{410}{11},\frac{470}{11}$；

对于分针超过时针的情形，由方程 $5.5b-30a=125$ 解得 $b=\frac{2}{11}(30a+125)$，当

$a=1,2,3,4,5,6,7$ 时，b依次为

$\frac{310}{11},\frac{370}{11},\frac{430}{11},\frac{490}{11},\frac{550}{11},\frac{610}{11},\frac{670}{11}$（大于 60 的应舍去）；

另外还要考虑等于$360-125=235$的情况. 对于分针超过时针的情形，由方程

$5.5b-30a=235$ 解得 $b=\frac{2}{11}(30a+235)$，当$a=1,2,3,4$时，b依次为

$\frac{530}{11},\frac{590}{11},\frac{650}{11},\frac{710}{11}$（大于 60 的应舍去）；

对于分针未超过时针的情形，由方程$30a-5.5b=235$ 解得 $b=\frac{2}{11}(30a-235)$，

当$a=8,9,10,11,12$ 时，b依次为

$\frac{10}{11},\frac{70}{11},\frac{130}{11},\frac{190}{11},\frac{250}{11}$.

由上所述共有 22 次，而一天有两个周期，共有 44 次.

因此，在一天内，时针与分针共有成 125° 角的时刻共有 44 次；最后一次形成 125° 角的时刻是这一天的 23 点$\frac{410}{11}$分.

答案. 在一天内，时针与分针共有 44 次形成 125° 角的时刻；最后一次形成 125° 角的时刻是这一天的 23 点$\frac{410}{11}$分.

评分标准. 给出两问中一问的答案给 15 分，给出另一问的答案再给 10 分. 结论

不正确，写出部分过程可给 5 至 10 分.

三、附加题（共 1 题, 10 分）

7. 将任意两个正整数a和b依次输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：
步骤 1：令q的值等于 0;
步骤 2：当a小于b时，依次输出q和a的值，结束整个程序；否则将a的值减去b，并且将q的值增加 1，重复执行步骤 2.
现在向程序依次输入正整数 122 和 7，请问程序输出q的值是______，a的值是______.

解析. 这个程序是用减法来实现带余数除法. 输入的 a 和 b 依次为被除数和除数, 每次将被除数减去除数，如果够减，q 的值加 1，直到不够减为止. 此时输出的 q 为带余数除法的商, 而 a 为余数.

若输入 $a=122$ 和 $b=7$，由带余除法 $122\div 7=17\ldots 3$ 可知输出的 $q=17$, $a=3$.

答案. 17, 3 .

评分标准. 给出两个正确得数得 10 分；仅给出其中一个正确得数得 5 分.