2021“华数之星”复评（三级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 对于一个大于 9 的自然数，将其个位数字记为y，划掉个位数字后得到一个比原来少一位的数，记为x，这样拆分后，计算$x-2y$的值作为新的数. 对这个新数继续按照上面的办法进行拆分，然后作同样的计算又得一个新数. 重复这样的做法，直到某一步得到新的自然数n不大于 9，或者继续拆分会出现$x<2y$，就停止拆分不再计算新数. 那么停止时数n会有______种可能. 如果开始给出的自然数是 7 的倍数，那么停止时数n会有______种可能.

解. $0\le y\le 9$，所以停止时有以下这些可能情况：$\overline{x9},1\le x\le 17$；$\overline{x8},1\le x\le 15$；$\overline{x7},1\le x\le 13$；$\overline{x6},1\le x\le 11$；$\overline{x5},1\le x\le 9$；$\overline{x4},1\le x\le 7$；$\overline{x3},1\le x\le 5$；$\overline{x2},1\le x\le 3$；11；$y,0\le y\le 9$；共有$17+15+\cdots+1+10=91$种可能；

$\overline{xy}=10x+y=10(x-2y)+21y$，于是$7\,|\,\overline{xy}\Leftrightarrow 7\,|\,(x-2y)$，即停止时结果是 7 的倍数, 而上述 91 个数中是 7 的倍数有：$119,49,98,28,77,56,35,14,7,0$共 10 种可能.

答案. 91, 10

评分标准：填出一个得 15 分，填出两个得 25 分.

2. 使$\dfrac{3n+2}{5n+1}$不为最简分数的所有可能的三位数n之和是______.

解. 设d是$3n+2$和$5n+1$的最大公约数，则由辗转相除法知

$$\begin{aligned}d&=(3n+2,5n+1)=(2n-1,3n+2)\\&=(2n-1,n+3)=(n-4,n+3)=(n-4,7)\end{aligned}$$

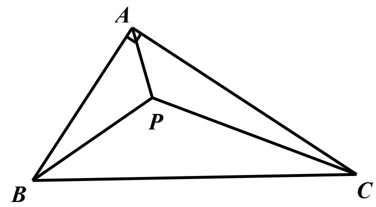
若$d=7$，则原式不为最简分数，即有$n-4=7k,k=0,1,2,\cdots$

n为三位数时，即$100\le n\le 999$，则有$100\le 7k+4\le 999$，解得$14\le k\le 142$.

其和为$7(14+15+\cdots+142)+4\times 129=70950$.

答. 70950

3. 如图，P为$\mathrm{Rt}\Delta ABC$内一点，其中$\angle BAC=90^\circ$，并且$PA=3$，$PB=7, PC=9$，则BC的最大值为______.



解. 构造矩形$ABQC$, 连接PQ，AQ，

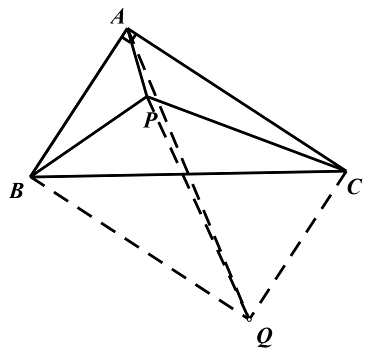
因为点P为矩形$ABQC$内的一点，

所以$PA^2+PQ^2=PB^2+PC^2$，

即$PQ=11$.

于是$BC=AQ\le PA+PQ=14$.

当且仅当APQ三点共线时取得等号.



答案. 14

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 一条匀速流动的河流，甲、乙两码头均在河边，相距 315 千米. A 船和 B 船分别从甲、乙码头同时相向出发，保持匀速，3 小时后相遇. 在相遇后两船继续前进，到达对方的码头后立刻返回并在途中第二次相遇. 两次相遇间隔 6 小时. 已知 A、B 两船的静水速度比为$4:3$，请说明哪个码头在上游，并计算 A 船走的总路程.

解法一. 设从甲到乙的水流速度为x km/h（x可能为负值），A 船共走了$315+S_1$ km，B 船共走了$315+S_2$ km，显然$S_1+S_2=315$.

第一次相遇用了 3 小时，所以两船的静水速度和为$315\div 3=105$ km/h，因此 A、B 两船的静水速度分别为 60 km/h 和 45 km/h.

可列方程组$\begin{cases}\dfrac{315}{60+x}+\dfrac{S_1}{60-x}=9\\ \dfrac{315}{45-x}+\dfrac{S_2}{45+x}=9\end{cases}$，转化为$\begin{cases}\dfrac{315(60-x)}{60+x}+S_1=9(60-x)\\ \dfrac{315(45+x)}{45-x}+S_2=9(45+x)\end{cases}$，

两式相加得

$$\frac{315(60-x)}{60+x}+\frac{315(45+x)}{45-x}+315=9\times 105,$$

化简变为$\dfrac{60-x}{60+x}+\dfrac{45+x}{45-x}=2$，再化简为$\dfrac{-2x}{60+x}+\dfrac{2x}{45-x}=0$.

因为水在流动，$x\neq 0$，所以$60+x=45-x$，$x=-7.5$.

可知水流是从乙到甲，水速为 7.5km/h，乙码头在上游.

A 船总路程为$315+\left(9-\dfrac{315}{60-7.5}\right)\times(60+7.5)=517.5$ km

解法二. 容易算出 A、B 两船的静水速度分别为 60 km/h 和 45 km/h.

从出发开始算起，第一次相遇和第二次相遇的路程比为 1：3，根据已知条件，第一次相遇和第二次相遇的时间比也是 1：3.

第一次相遇之前，两船相向行驶，速度和等于静水速度和. 如果两船在某时间段同向，那么它们这段时间的速度和大于(或小于)静水速度和，整体来看速度和不是恒定值. 时间比不会恰好为 1：3，因此，两船必然同时掉头.

因此，A 船一开始逆水，B 船一开始顺水，并且 A 逆水速度等于 B 顺水速度，进而可以算出乙在上游水速为7.5 km/h，A 船总路程为517.5 km.

答案. 乙码头在上游，总路程517.5千米

评分标准. 得出正确答案得 25 分；只得出总路程得 20 分；只得出上下游并讲理由得 15—20 分，没有理由得 5 分.

5. 解方程组$\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}=y\\ \dfrac{1}{1+y}=z\\ \dfrac{1}{1+z}=x\end{cases}$.

解法一. 首先可以看出x,y,z均不为 0.

原方程组化为$\begin{cases} \dfrac{1}{x}=1+z & (1) \\ \dfrac{1}{y}=1+x & (2) \\ \dfrac{1}{z}=1+y & (3) \end{cases}$，

$(1)-(2)$得，$\dfrac{y-x}{xy}=z-x$，同理可得$\dfrac{z-y}{yz}=x-y$，$\dfrac{x-z}{zx}=y-z$.

三式相乘得$\dfrac{(y-x)(z-y)(x-z)}{x^2y^2z^2}=(z-x)(x-y)(y-z)$，

进一步整理为$(y-z)(z-x)(x-y)(1+\dfrac{1}{x^2y^2z^2})=0$，即$x,y,z$中至少存在两个相等.

不妨设$x=y$，那么有$z=\dfrac{1}{1+y}=y$，即$x=y=z$，此时有容易解得$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

经检验无增根.

因此原方程的解为$x=y=z=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$x=y=z=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

解法二.

因为$\begin{cases} 1=y+xy\cdots\cdots(1) \\ 1=z+yz\cdots\cdots(2) \\ 1=x+xz\cdots\cdots(3) \end{cases}$，所以$\begin{matrix} (1)-(2)\ z-y=y(x-z)\cdots\cdots(4) \\ (2)-(3)\ x-z=z(y-x)\cdots\cdots(5) \\ (3)-(1)\ y-x=x(z-y)\cdots\cdots(6) \end{matrix}$.

将$(4)(5)(6)$左右两边相乘，可得

$xyz=1$或者$x=z$或者$y=x$或者$z=y$.

（i）若$xyz=1$. 则$xy=\dfrac{1}{z}$.

$$1=y+\frac{1}{z}$$

因此，

$$z=zy+1$$

又由于

$$z=1-zy$$

因此，

$$z=1, y=0$$

这与（1）矛盾！

（ii）x,y,z中有两个相等，不妨设，

$$x=y$$

因此，

$$1=x+x^2$$

所以，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

当 $x=y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

当 $x=y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$z=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

最后，经检验无增根.

答案. $x=y=z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=y=z=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

评分标准. 得出正确答案得 25 分；只得出一组解得 15 分；只得到 $x=y=z$ 得 10 分；只化简方程得 5 分.

6. 设多项式 $f(x)=x^2+ax+b$ 满足 $f(x)\mid f(x^2)$ 及 $f(0)<0$，求 $f(10)$.

解法一. 由所设有 $f(x^2)=x^4+ax^2+b$.用 $f(x)$ 除 $f(x^2)$ (带余除法)得

$f(x^2)=q(x)f(x)+(-a^3+2ab-a^2)x+(-a^2b+b^2-ab+b)$ (1)

其中 $q(x)$ 为商. 若 $f(x)\mid f(x^2)$，则有

$-a^3+2ab-a^2=-a^2b+b^2-ab+b=0$ (2)

若 $a=0$，则 $b=0$ 或 -1；若 $a\neq 0$ 且 $b=0$，则 $a=-1$；若 $a,b\neq 0$，则由(2)有

$-a^2+2b-a=-a^2+b-a+1=0$ (3)

由此得 $b=1$，$a=1$ 或 -2.故满足 $f(x)\mid f(x^2)$ 的 $f(x)$ 只有

x^2，x^2-1，x^2-x，x^2+x+1，x^2-2x+1，其中只有 x^2-1 满足 $f(0)<0$，故 $f(x)=x^2-1$，从而 $f(10)=99$.

解法二. 设 α，β 为 $f(x)=0$ 的两个实根，则 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，并且 $f(0)=\alpha\beta<0$，所以 α，β 一正一负，不妨设 $\alpha>0$，$\beta<0$.

$f(x^2)=(x^2-\alpha)(x^2-\beta)=(x+\sqrt{\alpha})(x-\sqrt{\alpha})(x^2-\beta)$.

由于 $f(x)\,|\,f(x^2)$，故 $\alpha=\sqrt{\alpha}$，$\beta=-\sqrt{\alpha}$ 并且 $\alpha>0$，可解得 $\alpha=1$，$\beta=-1$，$f(x)=x^2-1$，从而 $f(10)=99$.

答案：99

评分标准：得出正确答案得 25 分；得出 $f(x)=x^2-1$ 得 20 分；有思路但不完整得 15—20 分；得到根与因式的关系，或者有带余除法的思路得 5 分.

三、附加题（共 1 题，10 分）

7. 将任意三个正整数a、b、n依次输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：

步骤 1：令c的值等于$a+b$；

步骤 2：令a的值等于b；

步骤 3：令b的值等于c；

步骤 4：将n的值减去 1，若n等于 0，则输出b并结束整个程序，否则跳转至步骤 1.

现在向程序依次输入三个正整数 1、1、5，请问程序输出b的值是______.

解析. 本题的程序给出递归数列，满足差分方程

$$x_{i+1}=x_{i-1}+x_i \tag{1}$$

这是因为，在运行中若 $n>0$，$a=x_i$，$b=x_{i+1}$，则从步骤 1 到步骤 4，b 换为

$$a+b=x_i+x_{i+1}=x_{i+2}$$

而 n 减少 1. 若令输入的 $a=x_1$，$b=x_2$，则 $c=x_1+x_2$，由上所述可见若

在步骤 4 时 n 比输入值减少了 i ，则 b 已换为 x_{i+2} . 特别地，若在步骤 4 时 n 换为 0，则 b 已换为 x_{n+2} ，故程序输出的b的值为 x_{n+2} .

在本题中输入的 $\mathrm{a}=1$ ，$\mathrm{b}=1$ ，相当于对差分方程 (1) 给出初始条件

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 1 \tag{2}$$

这正是斐波那契数列满足的差分方程. 因此，程序输出的b的值为斐波那契数列的第 $n+2$ 项. 由于本题中输入的 $\mathrm{n}=5$ ，输出值为斐波那契数列的第 7 项. 不难算出它等于 13.

答案. 13