2021“华数之星”复评（四级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 已知m为正有理数且非整数, n为正整数, 满足$n = 13m - \frac{31}{m}$. 则$n =$________.

解. 设 $m = \frac{q}{p}$, 其中 p, q 为互质的正整数, $p > 1$. 则由所设有

$$n = 13\frac{q}{p} - \frac{31p}{q} = \frac{13q^2 - 31p^2}{pq} \qquad (1)$$

故

$$npq = 13q^2 - 31p^2 \qquad (2)$$

由 p, q 互质可见 $p|13$ ，从而 $p = 13$ ；而 $q|31$ ，再由 $n > 0$ 及（2）可见必有 $q = 31$ ，从而 $n = 18$.

答案. 18 .

2. 设正实数x满足$\sqrt[3]{25x + 2021} - \sqrt[3]{25x + 122} = 3$, 则$x =$________.

解. 移项得

$$\sqrt[3]{25x + 2021} = \sqrt[3]{25x + 122} + 3 \qquad (1)$$

两边取立方得

$$25x + 2021 = 25x + 122 + 9(\sqrt[3]{25x + 122})^2 + 27\sqrt[3]{25x + 122} + 27 \qquad (2)$$

记 $y = \sqrt[3]{25x + 122}$ ，化简得

$$y^2 + 3y - 208 = 0 \qquad (3)$$

方程（3）有两个解 $y = 13,\ -16$ ，由此得 $x = 83,\ -\frac{4218}{15}$ （后者不合题设）。代入原方程验根成立.

答案. $x=83$

3. 设非负实数a,b满足$a^3+b^3+9ab=27$. 则$a+b=$________.

解法一. 先将 $a^3+b^3+9ab-27$ 分解因式:

$$a^3+b^3+9ab-27=(a+b)(a^2-ab+b^2)+9ab-27$$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3(a+b)^2-3(a^2-ab+b^2)-27$$

$$=(a+b-3)(a^2-ab+b^2)+3(a+b+3)(a+b-3)$$

$$=(a+b-3)(a^2-ab+b^2+3a+3b+9) \qquad (1)$$

注意 $a^2-ab+b^2\geq 0$ ， 而由所设 $a+b\geq 0$ ， 故 $a^2-ab+b^2+3a+3b+9\geq 0>0$ 。由所设（1）的左边为 0，故必有 $a+b-3=0$ ， 即 $a+b=3$.

解法二. 利用对称多项式分解因式要容易些。令 $s=a+b$ ， $t=ab$ ， 则有

$$a^3+b^3+9ab-27=s^3-3st+9t-27$$

$$=(s-3)(s^2+3s+9)-3t(s-3)=(s-3)(s^2+3s+9-3t)$$

以下与解法一相同.

解法三. 利用公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

可得

$$a^3+b^3-27-3ab(-3)=\frac{1}{2}(a+b-3)((a-b)^2+(a+3)^2+(b+3)^2)$$

以下与解法一相同.

答案. $a+b=3$

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 小明用 4 个数a,b,c,d做加法练习,算出的得数是

$$a+b=9\ ,\ a+c=32\ ,\ a+d=38\ ,$$

$$b+c=37\ ,\ b+d=41\ ,\ c+d=44$$

请证明其中至少有一个得数是错的.

证法一. 对任意 4 个数 a,b,c,d 有

$$(a+b)+(c+d)=a+b+c+d=(a+d)+(b+c)$$

但按小明的得数，$(a+b)+(c+d)=29+44=73$ ，$(a+d)+(b+c)=38+37=75$ ，二者不相等，说明这 4 个得数中必有一个是错的。证毕。

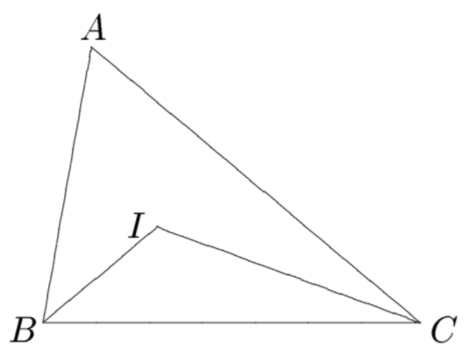
证法二. 用反证法，设这 6 个得数都是对的。将其中前 4 个算式看作 a,b,c,d 满足的一次方程组，得到唯一解

$$a=12,\ b=17,\ c=20,\ d=26$$

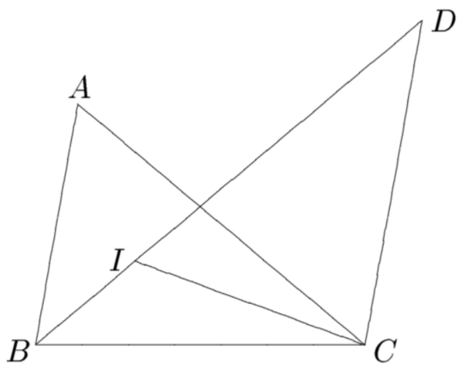
由此得 $c+d=46$ ，与小明的得数矛盾。证毕。

评分标准. 只要找出一个矛盾即可给满分；如果做了实质性的推导但未能显示出矛盾，或者论证理由不充分，可酌情给 10-20 分。

5. 在$\triangle ABC$中,$\angle A=60^{\circ}$,$\angle B=80^{\circ}$,I为内心.求证$CI=AB$.



证法一. 由所设可得 $\angle ACB = 40^{\circ}$ 。过 C 作 AB 的平行线与 BI 的延长线交于 D ，则 $\angle DBC = \angle BDC$，故 $DC = BC$。由所设可得 $\angle DCI = 80^{\circ} = \angle ABC$ ，$\angle IDC = 40^{\circ} = \angle ACB$，故 $\triangle ICD \cong \triangle ABC$ ，从而 $CI = AB$。



证法二. 易见 $\angle BIC = 120^{\circ}$ 。由正弦定理有

$$\frac{CI}{\sin 40^{\circ}} = \frac{BC}{\sin 120^{\circ}} = \frac{BC}{\sin 60^{\circ}} = \frac{AB}{\sin 40^{\circ}}$$

故 $CI = AB$。

评分标准. 给出一个完整的证明即可给满分；如果做了实质性的推导但未能完成证明，或者论证理由不充分，可酌情给 10-20 分。

6. 解方程 $2022^{x} = y^2 + 5z^2 + 1$, 其中$x, y, z$为正整数.

解. 由左边是偶数可见 y, z 必为一奇一偶，这样右边 $y^2 + 5z^2 + 1$ 模 4 余 2，故左边只能有 $x = 1$。试求方程 $y^2 + 5z^2 = 2021$ 的正整数解，得仅有两组解 $y = 24$，$z = 17$ 和 $y = 39$，$z = 10$.

答案. 原方程共有两组解 $x = 1$，$y = 24$，$z = 17$ 和 $x = 1$，$y = 39$，$z = 10$.

评分标准. 给出两组组解均正确即可给满分；仅给出一组正确的解可给 20 分；若无正确的解，判定 $x=1$ 可给 10 分，有进一步的推导可给 15 分.

三、附加题（共 1 题，10 分）

7. 将任意三个正整数a、b、n依次输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：

步骤 1：令c的值等于$\mathrm{a}+\mathrm{b}$；

步骤 2：令a的值等于b；

步骤 3：令b的值等于c；

步骤 4：将n的值减去 1，若n等于 0，则输出b并结束整个程序，否则跳转至步骤 1.

现在向程序依次输入三个正整数 1、1、5，请问程序输出b的值是______.

解析. 本题的程序给出递归数列，满足差分方程

$$x_{i+1}=x_{i-1}+x_i \tag{1}$$

这是因为，在运行中若 $\mathrm{n}>0$ ，$\mathrm{a}=x_i$ ，$\mathrm{b}=x_{i+1}$ ，则从步骤 1 到步骤 4，b 换为

$$\mathrm{a}+\mathrm{b}=x_i+x_{i+1}=x_{i+2}$$

而 n 减少 1. 若令输入的 $\mathrm{a}=x_1$ ，$\mathrm{b}=x_2$ ，则由上所述可见若在步骤 4 时 n 比输入值减少了 i ，则 b 已换为 x_{i+2} . 特别地，若在步骤 4 时 n 换为 0 ，则 b 已换为 x_{n+2} ，故程序输出的b的值为 x_{n+2} .

在本题中输入的 $\mathrm{a}=1$ ，$\mathrm{b}=1$ ，相当于对差分方程 (1) 给出初始条件

$$x_1=1\ , \quad x_2=1 \tag{2}$$

这正是斐波那契数列满足的差分方程. 因此，程序输出的b的值为斐波那契数列的第 $n+2$ 项. 由于本题中输入的 $\mathrm{n}=5$ ，输出值为斐波那契数列的第 7 项. 不难算出它等于 13.

答案. 13