

2021 “华数之星”复评（初级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

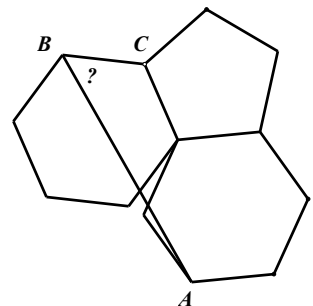
1. 对一本 1000 页的书稿进行校对，从头至尾编的页码为 1~1000. 校对时发现应将页码 213~223 书页提前到 185 页后 186 页前，页码 564~588 书页提前到 400 页后 401 页前. 然后重新标的新的页码为 1~1000. 问：原页码 219 的新页码为_____，新页码 460 的原页码为_____.

解. 原页码 186~212 对应于新页码 197~223；原页码 213~223 对应于新页码 186~196；原页码 224~400 对应于新页码 224~400；原页码 401~563 对应于新页码 426~588；原页码 564~588 对应于新页码 401~425。由此可见，原页码 219 所对应的新页码为 192，而新页码 460 所对应的原页码为 435。

答案. 192, 435

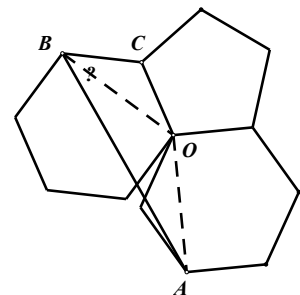
评分标准： 填对一个得 15 分，填对两个得 25 分.

2. 如图,由边长相同的正五边形和正六边形组成的组合图形中, $\angle ABC$ 的度数为_____.



答案: 54

解答： 连接 BO, OA , 由于等腰三角形 BCO 的顶角为 120° ，因此， $\angle CBO=30^\circ$ ，由于等腰三角形 BOA 的顶角为 132° ，因此， $\angle ABO=24^\circ$ 。从而 $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = 24^\circ + 30^\circ = 54^\circ$



3. 5 个互不相同的自然数任取两个求和，得到 10 个数（可能有相等的），其中最小的 3 个数分别是 25, 26, 29，最大的两个数分别是 46, 50. 求最初的 5 个数之和为_____.

解. 设这 5 个数从小到大依次为甲,乙,丙,丁,戊数，则甲乙两数和为 25，甲丙两数和为 26，丙戊两数和为 46，丁戊两数和为 50.

即: 甲+乙=25, 甲+丙=26, 丙+戊=46, 丁+戊=50

因此:

丙 - 乙=1, 丁 - 丙=4, 戊 - 甲=20,

进而得到:

丁 - 乙=5.

故: 甲+丁=(甲+乙)+(丁-乙)=25+5=30

因此, 乙+丙=29. 结合, 丙-乙=1,

得到: 乙=14, 丙=15.

进一步得到: 甲=11, 丁=19, 戊=31.

故: 5个数的和=11+14+15+19+31=90

答案. 90

二、解答题(每题 25 分, 共 3 题)

4. 一条圆形跑道长 600 米, 因铺设水管, 其中跑道上 AB 一段被挖开, 形成一个大坑. AB 的跑道长度为 150 米. 有一机器人放在跑道上循环行走. 前进的步长(跑道弧长)为 d 米, 可调整步长 d 的大小, 但调后不再改变, 并且 d 小于 600 米. 请设计出两种(d 的不同长度)方案, 使得机器人不断循环, 并且永远不会落入坑里.(碰到 A 或 B 也算落入坑里). 每种方案包括: (1) 步长 d 的值(不同方案的 d 的值). (2) 机器人的出发点.

解. 可设计如下方案。

方案一: 作一弧长 300 米, 该弧包含 AB , (A, B 不在弧的端点上). 机器人从该段弧的端点出发, $d=300$.

方案二: 作一弧长 200 米, 该弧包含 AB , (A, B 不在弧的端点上). 机器人从该段弧的端点出发, $d=200$.

方案三: 作一弧长 400 米, 该弧的一半部分包含 AB , (A, B 不在弧的端点与中点上). 机器人从该段弧的端点出发, $d=200$.

取方案一与方案二, 或方案一与方案三, 均符合要求。

评分标准. 仅给出一个正确的设计方案得 15 分; 给出两个正确且 d 不同的设计方案得 25 分; 给出两个正确但 d 相同的设计方案得 20 分; 给出的设计方案有误或不完整, 视具体情况得 5-15 分.

5. 黑板上写有 2~20 一串连续自然数, 甲,乙两人轮流擦数, 每次各擦去一个数, 直至最后只留两个数. 如果这两个数互质, 则甲为胜, 如果这两个数不是互质数, 则乙为胜. 甲先擦能否保证取胜? 如甲能保证取胜, 请给出一种取胜

方法; 如不能, 请说明理由.

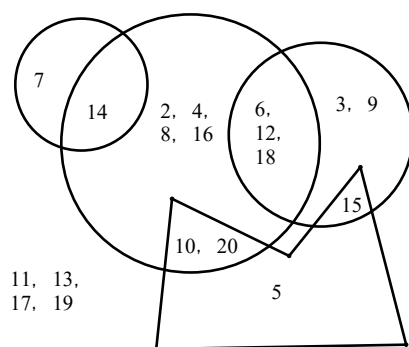
解. 甲先擦, 有保证取胜的策略. 具体说明如下.

注意 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 这 10 个数两两不互质. 3, 6, 9, 12, 15, 18 这 6 个数两两不互质. 5, 10, 15, 20 这 4 个数两两不互质. 7, 14 两两不互质. 11, 13, 17, 19 两两互质, 并且与其他数都互质.

为了保证余下的两个数互质, 只需保证余下的两个数不在同一组. 由此可以构造一个必胜策略:

甲先擦去 20, 然后配对 $\{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{10, 11\}, \{12, 13\}, \{14, 15\}, \{16, 17\}, \{18, 19\}$.

乙擦去任何一对中的一个数, 甲擦去该对中另外一个数. 余下的两个数必然属于同一配对组, 因此互质.



答案. 甲能保证取胜.

评分标准. 给出甲的任意一个必胜策略得 25 分; 断言甲能保证取胜, 但给出的必胜策略有误或有漏洞, 视具体情况得 10-20 分; 断言甲能保证取胜但没有给出具体策略, 可得 5 分.

6. 没有数码 9 的三位数有多少个? 它们的和是多少?

解. 一个三位数可表为 $100a+10b+c$, 其中 a 的取值为 1,2,3,4,5,6,7,8; b 的取值为 0,1,2,3,4,5,6,7,8; c 取值为 0,1,2,3,4,5,6,7,8.

由乘法原理, 没有数码 9 的三位数有 $8 \times 9 \times 9 = 648$ 个.

$$\text{它们的和} = \sum_{a=1}^8 \sum_{b=0}^8 \sum_{c=0}^8 (100a+10b+c)$$

由于百位数可取值 8 个, 所以每个可取值出现 $\frac{648}{8} = 81$ 次, 满足条件的百位数字之和 $= 81 \times (1 + 2 + \dots + 8) = 2916$.

同理可得, 满足条件的十位数字之和 $= 72 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 8) = 2592$; 满足条件的个位数字之和 $= 72 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 8) = 2592$.

所以, 满足题设条件的三位数之和= $291600+25920+2592=320112$.

答案. 648, 320112

评分标准. 给出两个问题的正确得数得 25 分; 给出两个问题的得数但仅有一个正确得 20 分; 给出两个问题的得数但无一正确, 视具体情况可得 10-15 分; 没有给出得数但对问题有分析, 视具体情况可得 5-10 分.

三、附加题 (共 1 题, 10 分)

7. 将任意两个正整数 a 和 b 依次输入到程序中, 程序将按照以下步骤执行:

步骤 1: 令 q 的值等于 0;

步骤 2: 当 a 小于 b 时, 依次输出 q 和 a 的值, 结束整个程序; 否则将 a 的值减去 b , 并且将 q 的值增加 1, 重复执行步骤 2.

现在向程序依次输入正整数 122 和 7, 请问程序输出 q 的值是 _____, a 的值是 _____.

解析. 这个程序是用减法来实现带余数除法. 输入的 a 和 b 依次为被除数和除数, 每次将被除数减去除数, 如果够减, q 的值加 1, 直到不够减为止. 此时输出的 q 为带余数除法的商, 而 a 为余数.

若输入 $a = 122$ 和 $b = 7$, 由带余除法 $122 \div 7 = 17 \dots 3$ 可知输出的 $q = 17$, $a = 3$.

答案. 17, 3.

评分标准. 给出两个正确得数得 10 分; 仅给出其中一个正确得数得 5 分.