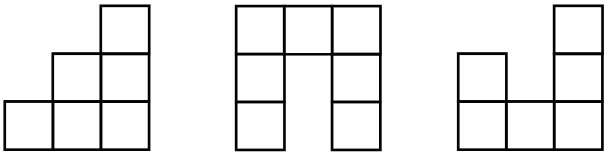
2021“华数之星”复评（初级）参考答案及评阅标准

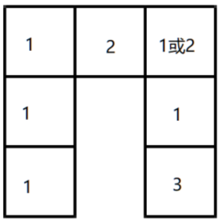
一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 一些正方体积木堆放在地面上，从正面, 上面, 左面看到的图形分别如下所示，这些积木最多可能有______块，最少可能有______块.



正面看　　　上面看　　　左面看

解. 根据三视图, 结合从上面看的图，每竖堆的正方体数目如下图标的数字，



因此，这些积木最多可能有 11 块，最少可能有 10 块.

答案. 11，10

评分标准. 填对一个给 15 分，填对两个给 25 分.

2. 有一个绿化蓄水池, 入水口打开可以匀速连续向池内注水, 出水口打开可以匀速连续向外供水. 如果打开入水口关闭出水口, 18 个小时可将空水池注满；如果打开出水口关闭入水口,6 个小时可放完满池水. 在一次清理中放空了水池并关闭了出水口与入水口. 考虑到入水口的注水速度, 计划以后每天从 9 点到 17 点打开出水口供水（其他时间出水口关闭），而入水口每天保持打开状态（保障每天的入水量与出水量相同）. 问清理完毕后, 开始供水的前一天, 在什么时间段（______点到______点之间）打开入水口, 可以保证此后出水口每天正常供水.

解. 按照计划, 出水口每天从早晨 9:00 起连续供水 8 小时, 而一满池水仅够供水 6 小时, 所以在供水的 8 小时中需要注入至少相当于 2 小时的供水量. 由于入水口注满一池水共需要 18 小时, 注入相当于 2 小时的供水量需要 6 小时. 因此, 在 9:00 打开出水口时, 池中的水距离满池至多差相当于$8-6=2$ 小时的注水量. 由此可见, 清理完毕后为了保证第二天能正常供水, 最迟要在第二天早晨 9:00 之前$18-2=16$ 小时 (即下午 5:00) 就需要打开入水口；另一方面, 在第二天早晨 9:00 之前至多只能打开入水口 18 个小时 (否则水会过满溢出), 所以打开入水口

的时间最早比第二天早晨 9:00 早 18 个小时 (即下午 3:00).

答案. 15, 17.

评分标准. 填对一个给 15 分，填对两个给 25 分.

3. 10 个不可区分的白球排成一行, 将其中 3 个涂成红色, 要求 3 个红球中有 2 个相邻, 另 1 个不相邻. 如果被涂成红色的球的位置不完全相同, 就视为不同的涂法. 那么有______种不同的涂色方法.

解法一. 3 个红球中相邻的 2 个球可以在第 3 个球的右边, 也可以在第 3 个球的左边. 一种涂法完成后, 我们在 2 个靠外边红球中间拿掉 1 个红球和 1 个白球. 这样就成了 8 个白球任意涂红其中的 2 个成红色, 不一定红球之间有白球. 这种对应是 2 对 1, 因为拿掉的红球可以是紧邻左边的红球, 也可以是紧邻右边的红球; 反之,8 个白球涂红其中 2 个, 再将 1 红球和 1 白球放在 2 个红球之间就对应题设的一种涂色方法, 但是注意到放入的红球可以紧邻左边的原有的红球, 也可以紧邻右边的原有的红球. 所以这也是 1 对 2 的对应关系. 因此, 8 个红球任意涂红 2 个的不同涂法有 $7\times8\div2=28$ 种, 那么, 本题的涂法就有 56 种.

解法二. 先选择相邻的 2 个球涂成红色, 共有 9 种可能的选择. 再选第三球涂红时, 有两种可能: 或者已涂红的两个球都不在两端, 此时选第三球要避免与它们相邻只有 $10-2-2=6$ 种选法; 或者已涂红的两个球有一个在端点处, 此时选第三球要避免与它们相邻只有 $10-2-1=7$ 种选法. 后者只有 2 种可能形情, 所以前者有 $9-2=7$种可能形情. 因此满足条件的涂红方法共有 $6\times7+7\times2=56$ 种.

解法三. 在 7 个白球之间和头尾加一个空筐，共 8 个筐，两组红球在 8 个筐中任选两个存放，注意到两组红球一组 1 个一组 2 个有次序，共有 8 选 2 的排列，为 $8\times7=56$种.

答案. 56

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 在下面的算式的每个方框“□”中填入 2 至 7 中的一个数, 使得等式成立.（其中相邻的两个“□”表示一个两位数）

$$□□\times43-□□\times47=1$$

解. 根据辗转相除法,

$47=43\times1+4$,（1）
$43=4\times10+3$,（2）
$4=3\times1+1$,（3）

由（1）得到 4 的表示式$4=47-43\times1$，代入（2），$43=(47-43\times1)\times10+3$，整理得到 3 的表示式$3=43\times11-47\times10$，把 4 的表示式与 3 的表示式代入（3）得到：

$47-43\times1=(43\times11-47\times10)\times1+1$，整理得到：

$$47\times11-43\times12=1,$$

$47\times(11-43n)-43\times(12-47n)=1$ 或 $47\times(11+43n)-43\times(12+47n)=1$ 对任意的自然数 n 成立.

$n=1$ 时，得到 $43\times35-47\times32=1$ 或 $47\times54-43\times59=1$

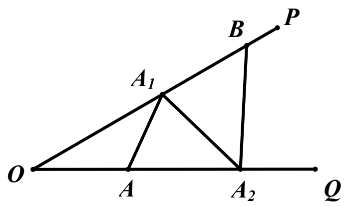
$n\ge2$ 时，$47n-12\ge70$，$12+47n\ge80$，

因此，前两个方框“□”表示的两位数为 35，后两个方框“□”表示的两位数为 32.

答案. 前两个方框“□”表示的两位数为 35，后两个方框“□”表示的两位数为 32.

评分标准. 正确给出两个两位数给 25 分；仅给出一个正确的两位数给 15 分，但有正确的推导过程仅是答案计算有误可给 20 分；两个两位数均未正确给出，但有正确的推导过程，可视具体情况给 5-15 分.

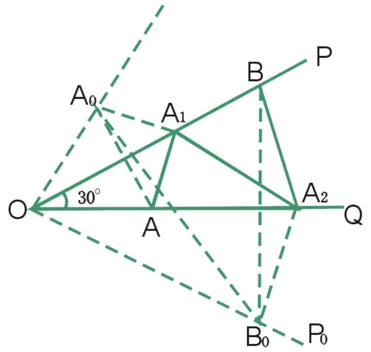
5. 如图 $\angle POQ=30°$，A 为 OQ 上一点，B 为 OP 上一点，且 $OA=5$，$OB=12$，在 OB 上取点 A_1，在 AQ 上取点 A_2 .记 $l=AA_1+A_1A_2+A_2B$. 求 l 的最小值.



解. 如图,以 OP 所在直线为对称轴，作 OQ 的轴对称图形 OQ_0 .

以 OQ 所在直线为对称轴,作 OP 的轴对称图形 OP_0 .

这时，A 点关于 OP 的对称点为 OQ_0 上的 A_0 点，B 点关于 OQ 的对称点为 OP_0 上的 B_0 点. $OA_0=5$，$OB_0=12$. 由对称性知 $A_0A_1=AA_1$，$A_2B=A_2B_0$



所以$l = AA_1 + A_1A_2 + A_2B = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2B_0$

因此 l 的最小值为 A_0B_0 的长.问题归结为"在 $Rt\Delta A_0 0 B_0$ 中,$OA_0 = 5$，$OB_0 = 12$，求 A_0B_0 的长.

依据勾股定理得 $A_0B_0 = \sqrt{OA_0^2 + OB_0^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$，因此$l$的最小值为 13.

答案. 13.

评分标准. 给出正确答案给 25 分；未给出正确答案但画出辅助线并说明所求的最小值等于 A_0B_0 的长， 可给 20 分；仅有部分推导过程正确，视具体情况可给 5-15 分.

6. 5 个互不相同的自然数任意两个求和, 得到 10 个数（可能有相等的）中最小的 3 个数分别是 25, 26, 30, 最大的两个数分别是 46, 50, 则这 5 个数之和可能值为多少？

解. 设这 5 个数从小到大依次为甲,乙,丙,丁,戊数, 则甲乙两数和为 25, 甲丙两数和为 26, 丙戊两数和为 46, 丁戊两数和为 50.

即: 甲+乙=25, 甲+丙=26, 丙+戊=46, 丁+戊=50

因此:

丙 - 乙=1, 丁 - 丙=4, 戊 - 甲=20,

进而得到:

丁 - 乙=5.

故: 甲+丁=（甲+乙）+（丁 - 乙）=25+5=30

因此, 乙+丙>=30.

而

丁=乙+5<戊=甲+20, 得到:乙<甲+15,

结合: 甲+乙=25, 满足要求的 5 个数{甲,乙,丙,丁,戊}分别为:

{6, 19, 20, 24, 26}, {7, 18, 19, 23, 27}, {8, 17, 18, 22, 28}, {9, 16, 17, 21, 29}, {10, 15, 16, 20, 30}

故 5 个数的和可能为: 95, 94, 93, 92,91.

答案. 5 个数的和可能为: 95, 94, 93, 92,91.

评分标准. **完整**给出正确答案给 25 分；给出的正确答案不完整或其中有误， 可给视具体情况给 15-20 分；仅有部分推导过程正确，视具体情况可给 5-15 分.

三、附加题（共 1 题，10 分）

7. 将任意一个大于0小于10的整数n输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：
步骤 1：令 q 的值等于 1；
步骤 2：当 n 等于 0 时，跳转至步骤 3，否则将 q 的值乘 n，n 的值减 1，重复执行步骤 2；
步骤 3：输出 q，结束整个程序.
现在向程序输入整数 7，请问程序输出 q 的值是______.

解析. 这个程序是计算 n 的阶乘。输入的整数 n 在步骤 2 中每次减 1，直到 n 变成 0，而 q 每次乘以 n、n-1、…、3、2、1，因此 q 的值是从 1 到 n 这 n 个数的乘积，也就是 n 的阶乘. 由于向程序输入的整数是 7，程序输出 q 为 $7!=5040$.

答案. 5040