2021“华数之星”复评（二级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 可表为$1+2+3+\cdots+n$的数称为三角形数．大于 40 的自然数中，既是三角形数，也是平方数的最小者是______．

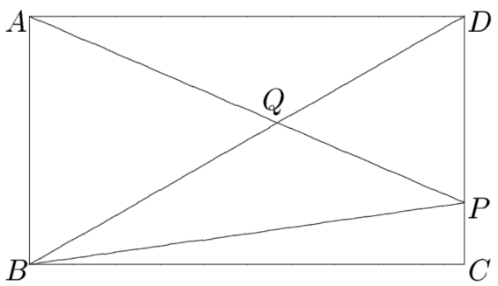
解． 我们知道 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，于是问题就是求方程

$$\frac{n(n+1)}{2}=m^2$$

的正整数解． 注意n和$n+1$互质，可见或者n为偶数而$\frac{n}{2}$和$n+1$都是平方数，或者n是奇数而$\frac{n+1}{2}$也是平方数．由此可以对奇平方数逐一试算．不难得到（1）式的最小两组正整数解为$n=8, m=6$和$n=49, m=35$．因此，大于 40 的自然数中，既是三角形数，也是平方数的最小者是 1225．

答案． 1225．

2. 如图所示，在长方形$ABCD$中，P是边CD上一点，AP和BD交于Q，已知$S_{\Delta ABQ}=32$，$S_{\Delta BCP}=14$，那么$S_{ABCD}=$________．



解． $S_{\Delta ABQ}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta AQD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BQP}=S_{\Delta BCP}+S_{\Delta PQD}$，所以$S_{\Delta PQD}=18$．

设$S_{\Delta AQD}=S_{\Delta BQP}=x$，那么$\dfrac{x}{32}=\dfrac{18}{x}$，$x=24$．

$S_{ABCD}=2(S_{\Delta ABQ}+S_{\Delta AQD})=112$．

答案． 112．

3. 汉字“华，数，之，星，牛，年，大，吉”代表 2 至 7 的自然数（不同的汉字可以代表相同的数），要使下式成立，$\overline{华数之星}$代表的自然数是______.

$$\frac{\overline{华数}}{\overline{牛年}}-\frac{\overline{之星}}{\overline{大吉}}=\frac{1}{2021}.$$

解． 因为 2021=43×47, $\overline{牛年}$,$\overline{大吉}$ 应为 43 和 47. $\frac{\overline{华数}}{\overline{牛年}}-\frac{\overline{之星}}{\overline{大吉}}=\frac{1}{2021}$ 等价于

$43\overline{牛年}-47\overline{大吉}=1$或$47\overline{牛年}-43\overline{大吉}=1$.

由辗转相除法可得 $47\times 11-43\times 12=1$ ，故对任一整数 n 有

$$47(11+43n)-43(12+47n)=1$$

我们需要找一个 n 使得 $11+43n$ 与 $12+47n$ 都是由两个 2 至 7 的整数表达（同时为正或同时为负），经验算知只能取 $n=-1$ ，即有

$$43\times 35-47\times 32=1，\frac{35}{47}-\frac{43}{43}=1$$

故$\overline{华数之星}=3532$.

答案. 3532.

二、**解答题**（每题 25 分，共 3 题）

4. 小明以“6”，“8”为吉利数字.现有 100 个口罩小明要分发给甲、乙、丙 3 位朋友, 每位朋友分到的口罩数目必须为“6”或“8”的正整数倍.请问分得最多口罩的人所分得的口罩数有哪些种可能？

解. 用“6”,“8”表示 100，有以下几种情形：

（1）$100=8\times 2+6\times 14$，此时按照要求分为三份有以下几种情况：8, 8, 84 或 16, 6, 78 或 16, 12, 72 或 16, 18，66 或 16, 24, 60 或 16, 30, 54 或 16, 36, 48 或 16, 42, 42.

（2）$100=8\times 5+6\times 10$，此时按照要求分为三份有以下几种情况：8, 32,

60 或 16, 24, 60 或 40, 6, 54 或 40, 12, 48 或 40, 18, 42 或 40, 24, 36 或 40, 30, 30.

（3）$100 = 8 \times 8 + 6 \times 6$，此时按照要求分为三份有以下几种情况：8, 56, 36 或 16, 48, 36 或 24, 40, 36 或 32, 32, 36 或 64, 6, 30 或 64, 12, 24 或 64, 18, 18.

（4）$100 = 8 \times 11 + 6 \times 2$，此时按照要求分为三份有以下几种情况：8, 80, 12 或 16, 72, 12 或 24, 64, 12 或 32, 56, 12 或 40, 48, 12 或 88, 6, 6

因此分得最多口罩的人所分得的口罩数有 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, 78, 80, 84, 88.

答案. 分得最多口罩的人所分得的口罩数共有 14 种可能，分别为：36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 64, 66, 72, 78, 80, 84, 88 .

评分标准. 写出 2 个给 5 分， 3 个给 10 分，5 个给 15 分，10 个给 20 分，14 个给 25 分. 包含错误的口罩数不超过 5 个忽略，超过 5 个本题不给分. 结论不正确，写出部分原因给 5 至 10 分.

5. 甲、乙、丙三人赛跑，每次比赛第一名得 a 分，第二名得 b 分，第三名得 c 分，其中 $a > b > c$ 且 $a, b\ c$ 都是正整数. 经过若干次比赛后，甲共得 20 分，乙共得 10 分，丙共得 9 分，且乙最后一次比赛是第一名. 求 a，b，c.

解. 注意到 $20+10+9=39=3\times13$,，所以比赛场次 $n=3$，$a+b+c=13$.

乙第 3 次得 a 分，前两次都只能得 c 分，否则乙 3 次的得分要超过 10 分. 所以

$$a + 2c = 10 \quad (1)$$

丙没有得过第一名，否则丙的得分要超过乙. 因此前两次丙都是第二名，甲都是第一名. 若第 3 次丙也是第二名，则 $3b = 9$，$b = 3$，从而 $a + c = 13 - 3 = 10$，与（1）矛盾.

因此第 3 次丙得第三名，甲为第二名，因此

$$2b + c = 9, \quad (2)$$

$$2a+b=20. \qquad (3)$$

由（2）式知c是奇数，

若$c=1$，此时$b=4, a=8$.

若$c=3$，由（2）$b=3$，与（3）式中b为偶数矛盾.

若$c=5$，由（2）$b=2<c$，矛盾.

所以$a=8$，$b=4, c=1$.

答案. $a=8$，$b=4, c=1$.

评分标准. 写对a，b，c中之一给10分，之二给20分，都对给25分．得数都不正确但有部分正确推导可给5至10分.

6. 两位小学生被邀请参加初中象棋比赛，每位选手都与其他选手比赛一次，每场比赛胜者得2分，平局各得1分，输者得0分．若每位初中学生得分都相同，两位小学生共得20分．求参赛的初中组学生人数（所有可能的人数).

解. 设参赛的初中组学生的人数为n，每人得k分，则所有参赛学生的得分总数为$20+nk$，而一共$n+2$个人，比赛$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$场，总得分应为$(n+2)(n+1)$分，因此

$$(n+2)(n+1)=20+nk$$

即$n^2+(3-k)n=n(n+3-k)=18$，得$n=1,2,3,6,9,18$．当$n=1,2,3$时，明显不符合题意.

（1）当$n=6$时，$k=6$，共8位选手，假定小学每位学生胜5场，初中组每位学生胜3场，如1号胜3、4、5、6、7；2号胜1、5、6、7、8；3号胜2、5、6；4号胜2、3、6；5号胜4、7、8；6号胜5、7、8；7号胜3、4、8；8号胜1、3、4；此构造可行；

（2）当$n=9$时，$k=10$，共11位选手，每人胜5场即可，1号胜2、3、4、

5、6；2 号胜 3、4、5、6、7；3 号胜 4、5、6、7、8、9；......以此类推，此构造可行；

（3） 当$n=18$时，$k=20$，共 20 位选手，可假定小学其中一位学生为 20 号，全输，其余 19 位选手，每人均胜 10 场，如 1 号胜 2、3、4、5、6、7、8、9、10、20；2 号胜 3、4、5、6、7、8、9、10、11、20；3 号胜 4、5、6、7、8、9、10、11、12、20；......以此类推，此构造可行.

所以参赛的初中组学生人数为 6, 9 或 18.

答案. 参赛的初中组学生人数为 6, 9 或 18.

评分标准. 写对三个答案之一给 10 分，之二给 20 分，都对给 25 分. 得数都不正确但有部分正确推导可给 5 至 10 分.

三、附加题（共 1 题, 10 分）

7. 将任意一个大于 0 小于 10 的整数 n 输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：
步骤 1：令 q 的值等于 1；
步骤 2：当 n 等于 0 时，跳转至步骤 3，否则将 q 的值乘 n，n 的值减 1，重复执行步骤 2；
步骤 3：输出 q，结束整个程序.
现在向程序输入整数 7，请问程序输出 q 的值是______.

解析. 这个程序是计算 n 的阶乘。输入的整数 n 在步骤 2 中每次减 1，直到 n 变成 0，而 q 每次乘以 n、n-1、…、3、2、1，因此 q 的值是从 1 到 n 这 n 个数的乘积，也就是 n 的阶乘. 由于向程序输入的整数是 7，程序输出 q 为 7!=5040.

答案. 5040