2021“华数之星”复评（三级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 对自然数 n,若存在 2 个小于 n 的非 0 自然数 $x<y$,使得 $n+x$ 和 $n+y$ 都是平方数，那么就称 n 是“好数”.若 A 是使得任意大于 A 的自然数都是“好数”的最小自然数, 则 $A=$______.

解. 先证明：若 $k\ge5$，则任意 $n\ge k^2$ 的自然数都是好数.

事实上，当 $k\ge5$ 时，对完全平方数 k^2，

$k^2-4k-4=k^2-4k+4-8=(k-2)^2-8\ge(5-2)^2-8=1$，

所以 $k^2>4k+4>2k+1$，即 $k^2+2k+1=(k+1)^2, k^2+4k+4=(k+2)^2$， k^2 是好数

对 $n=k^2+m, 2k+1>m>0$，有 $n+(2k+1-m)=k^2+m+(2k+1-m)=(k+1)^2$，

$n+(4k+4-m)=k^2+m+(4k+4-m)=(k+2)^2$.

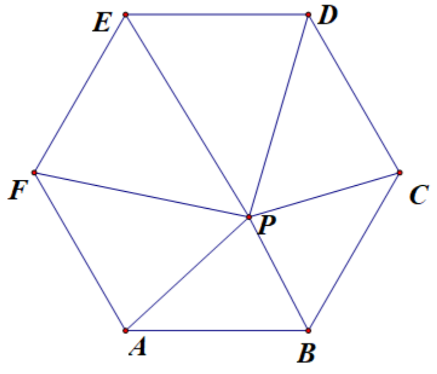
可见任意自然数 $n\ge25$ 都是好数.

当 $n=24$，在 24 和 47 之间存在两个完全平方数，从而 24 是好数.

同理可证，19，20，21，22，23 都是好数.
当 $n=18$ 时，在 18 和 35 之间只有一个完全平方数，18 不是好数.
所求的 A 值为 18.

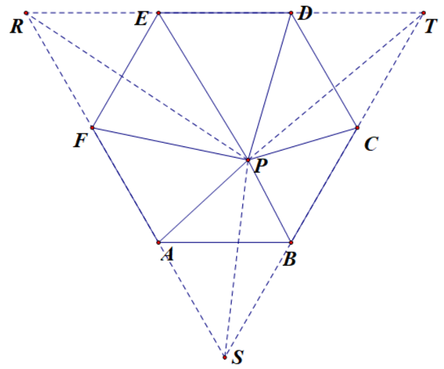
答案. 18

2. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 内有一点 P，使得 $S_{\Delta AFP}=2S_{\Delta BCP}$， $S_{\Delta AFP}=2+S_{\Delta ABP}$，求 $S_{\Delta DEP}=$______.



解． 作直线 AF,BC,DE，彼此交于 R,S,T．得到正三角形 RST，连接 PR,PS,PT．

设 $S_{\Delta BCP}=x$，那么 $S_{\Delta AFP}=2x$，$S_{\Delta ABP}=2x-2$．设 $S_{\Delta DEP}=y$．



$2x-2+y=\frac{1}{3}S_{ABCDEF}$，

由于 $AF=\frac{1}{3}RS$，$BC=\frac{1}{3}ST$，$DE=\frac{1}{3}RT$，

所以 $2x+x+y=\frac{1}{3}S_{\Delta RST}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}S_{ABCDEF}=\frac{1}{2}S_{ABCDEF}$．

所以 $\frac{2x-2+y}{3x+y}=\frac{2}{3}$，$y=6$．

答案. 6

3. 多项式 $f(x)=x^4-ax^2+3(2-b)x+c+1$，其中 a,b,c 是正整数．设方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根也是方程 $f(x)=0$ 的根，则方程 $f(x)=0$ 的另外两个根为______和______.（注：若两根有大小，先填小的后填大的；若两根相同，重复填两次）

解法一. 由带余除法 $f(x)=(x^2+3x+1)(x^2-3x+8-a)+3(a-b-5)x+c+a-7$，可知 $5-a+b=c+a-7=0$，而由 a,b,c 是正整数有 $a\ge 6\ge a$，得到 $a=6$，从而 $x^2-3x+8-a=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，所以另外两个根是 $1,2$．

解法二. 待定系数法．设

$f(x)=(x^2+3x+1)(x^2+ux+v)=x^4+(u+3)x^3+(1+v+3u)x^2+(u+3v)x+v$

得到 $u+3=0,1+v+3u=-a,u+3v=3(2-b),v=c+1$，得到 $u=-3,a=7-c,a-b=5$，$b=2-c,v=1+c$，由 a,b,c 是正整数，得到 $a=6,b=c=1$，

所以 $f(x)=(x^2+3x+1)(x^2-3x+2)$.

解法三. 降次法. 由于 $x^2+3x+1=0$ 我们有

$$f(x)=(3x+1)^2-ax^2+3(2-b)x+c+1=(9-a)x^2+[3(2-b)+6]x+c+2$$
$$=(a-9)(3x+1)+[3(2-b)+6]x+c+2=3(a-b-5)x+(c+a-7)$$

因此，$3(b-a+5)=c+a-7=0$，由于 a,b,c 均为正整数，因此，$a=6,b=1,c=1$.

答案. $1,2$

评分标准. 答对两个给 25 分；答对其中一个给 15 分.

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 设 a 为实数.证明 $a^8-a^2+1>0$.

证. 若 $|a|\geq 1$,则 $a^6\geq 1$,从而 $a^8\geq a^2$, $a^8-a^2+1\geq 1>0$;若 $|a|<1$,则 $a^2<1$,而 $a^8\geq 0$,从而 $a^8-a^2+1\geq 1-a^2>0$.故在任何情形都有 $a^8-a^2+1>0$.

评分标准. 本题的证法很多, 只要给出一种正确的证法即可给 25 分; 若论证不完整或有缺陷, 视具体情况可给 10-20 分.

5. 某实验室经常需要购买 A,B,C 三种元件,元件的价格都是整数元.某次购买 A 元件 2 个,B 元件 5 个,C 元件 13 个,共用了 173 元;另一次购买 A 元件 5 个,B 元件 13 个,C 元件 35 个,共用了 462 元.求三种元件的价格.

解. 设 A,B,C 三种原件的价格依次为 x 元, y 元, z 元.则所给的条件可表为

$2x+5y+13z=173$ (1)

$5x+13y+35z=462$ (2)

$(2)-2(1)$ 得 $x+3y+9z=116$ (3)

$2(3)-(1)$ 得 $y+5z=59$ (4)

$(3)-3(4)$ 得 $x-6z=-61$ (5)

故 $x=6z-61$，$y=59-5z$ (6)

注意 $x,y>0$，由(6)可见 $6z>61$，$5z<59$. 由于 z 是整数, 由此可得 $z\geq 11$，$z\leq 11$，

从而 $z=11$.代入(6)得 $x=5$，$y=4$.

答案. A,B,C 三种元件的单价分别为 5 元,4 元,11 元.

评分标准. 三种元件的单价均答对给 25 分; 答对三种中的两个单价给 20 分;答对三种中的一个单价给 15 分; 没有得到正确的单价但有正确的推导，可根据具体情况给 5-15 分.

6. 设正整数 a,b,c 满足 $a^3=(8c-48)^2$，$b^3=(27c-55)^2$ 及 $c>2$.求 c.

解. 由所设可见 $8c-48$，$27c-55$ 均为立方数. 设 $8c-48=x^3$，$27c-55=y^3$.

令 t 为 x,y 的最大公约数, $x=mt$，$y=nt$，则有

$1736=27(8c-48)-8(27c-55)=27x^3-8y^3=t^3(3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)$ (1)

故 $t^3\,|\,1736$，从而 $t=1$ 或 2.

若 $t=2$，则由(1)有

$(3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)=217=7\cdot 31$ (2)

不难得到(2)仅有一组正整数解 $m=3,n=4$，此时有 $c=21$.

若 $t=1$，则由(1)有

$(3m-2n)(9m^2+6mn+4n^2)=1736=8\cdot 7\cdot 31$ (3)

不难得到(3)仅有一组正整数解 $m=6,n=8$，但此时 c 非整数, 不合题设.

答案. 21.

评分标准. 答案对给 25 分; 答案不对但有正确的推导,可根据具体情况给 10-15 分.

三、附加题（共 1 题，10 分）

7. 将任意一个大于 0 的整数 n 输入到程序中，程序将按照以下步骤执行:

步骤 1：令 p 的值等于 0;

步骤 2：当 n 等于 0 时，跳转至步骤 3，否则令 b 的值等于 n 除以 10 的余数，将 p 的值加上 b，令 n 等于(n-b)÷10，重复执行步骤 2;

步骤 3：令 q 的值等于 p 除以 9 的余数，依次输出 p 和 q，结束整个程序;

现在向程序输入整数 3527594，请问程序输出 p 的值是____，q 的值是____.

解析. 这个程序是计算 n 的各位数字之和, 以及它的各位数字之和除以 9 的余数. 在步骤 2 中，每次将 p 的值加上 n 的末位数字 b，“令 n 等于(n-b)÷10”实际上是将 n 的末位截断, 因此从 n 的最低位开始, 从右到左每一位的数字都将累加到 p, 直到 n 变为 0。故输出的 p 为 n 的各位数字之和，q 为 n 的各位数字之和除以 9 的余数.

由输入的整数 3527594 不难算出其各位数字之和为 35, 而 35 除以 9 的余数为 8.

答案. 35，8

评分标准. 答对两个给 10 分. 答对其中一个给 5 分.