2021“华数之星”复评（四级）参考答案及评阅标准

一、填空题（每题 25 分，共 3 题）

1. 求两个正整数 $m=$______，$n=$______，使得 $(2021^2+1)(m^2+1)=n^2+1$.

解． 先考虑一般的方程 $(x^2+1)(y^2+1)=z^2+1$。左边 $(x^2+1)(y^2+1)=(xy)^2+(x^2+y^2)+1$，如果 $x^2+y^2=2xy+1$，右边就可以化为 n^2+1 的形式（这里 $n=xy+1$）。而 $x^2+y^2=2xy+1$ 可化为 $(x-y)^2=1$，这等价于 $y=x\pm 1$.

由此就得到原方程的一个解法：可取 $m=2020$（或 2022），相应的 $n=2020\times 2021+1$（或 $2021\times 2022+1$）.

评分标准. 本题有无穷多组解，只要找到一组解即可给满分；给出的解仅有一个数正确给 15 分.

2. 设三个实数 x,y,z 满足

$$xy=3,\quad yz=5,\quad zx=7$$

求 $105(x^2+y^2+z^2)=$______.

解. 将三式相乘得

$$x^2y^2z^2=105$$

将此分别除以三式的平方得

$$z^2=\frac{35}{3}\text{，}\quad x^2=\frac{21}{5}\text{，}\quad y^2=\frac{15}{7}$$

故 $105(x^2+y^2+z^2)=35^2+21^2+15^2=1891$ 。

答案. 1891。

3. 已知 x 是一个大于 15 的整数，使得 $x^3+2x^2+89x-1848$ 是一个整数的立方。求 $x=$______.

解. 由所设存在一个正整数 y 使得

$$x^3+2x^2+89x-1848=y^3 \tag{1}$$

首先注意当 $x=16$ 时 $2x^2+89x-1848>0$，故对任一大于 15 的整数 x 都有 $2x^2+89x-1848>0$ 。由此可见 $y^3=x^3+2x^2+89x-1848>x^3$，从而 $y>x$，$y\ge x+1$。另一方面，

$$(x+2)^3-y^3=(x+2)^3-(x^3+2x^2+89x-1848)=4x^2-77x+1896 \tag{2}$$

易见 (2) 右边的二次多项式的判别式 <0，故它恒大于零。这说明 $(x+2)^3>y^3$，从而

$x+2>y$ ，$x+1\geq y$.由此得 $y=x+1$.代入 (1) 得

$$x^3+2x^2+89x-1848=(x+1)^3 \quad (3)$$

化简得

$$x^2-86x+1849=0 \quad (4)$$

这个方程有唯一解 $x=43$.

答案. 43

二、解答题（每题 25 分，共 3 题）

4. 设 a_1 ，a_2 ，a_3 ，. . . 为一个等差数列. 已知对两个整数 $i>j>1$ 有 $a_i=a$, $a_j=b$。求该数列的通项公式 (即用 i,j,a,b,n 表达 a_n).

解. 设公差为 d, 则对任一 n ⩾1 有 $a_n=a_1+(n-1)d$.由所设有

$$\begin{cases}a=a_i=a_1+(i-1)d\\ b=a_j=a_1+(j-1)d\end{cases}$$

由这两个方程不难解得 $d=\frac{a-b}{i-j}$ ，$a_1=\frac{(i-1)b-(j-1)a}{i-j}$ 。故对一般的 n 有

$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{(n-j)a-(n-i)b}{i-j}$.

答案. $a_n=\frac{(n-j)a-(n-i)b}{i-j}$.

评分标准. 给出正确的公式即可给满分; 所得公式有小错误可给 20 分; 若未能给出公式但有实质性的推导可给 10-15 分.

5. 将 x,y,z 的多项式 $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$ 分解因式.

解法一. 首先有

$$\begin{aligned}x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)&=-z^3(x-y)-xy(x^2-y^2)+z(x^3-y^3)\\&=(x-y)(-z^3-x^2y-xy^2+zx^2+zxy+zy^2)\end{aligned}$$

(1)

而

$$\begin{aligned}-z^3-x^2y-xy^2+zx^2+zxy+zy^2&=z(y^2-z^2)-x^2(y-z)-xy(y-z)\\&=(y-z)(yz+z^2-x^2-xy)=(y-z)(z-x)(x+y+z)\end{aligned}$$

(2)

由 (1) 和 (2) 得

$$x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)=(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \quad (3)$$

解法二. 易见当 $x=y$ 时该多项式的值为 0，故它能被 $(x-y)$ 整除.同理它能被 $(y-z)$ 和 $(z-x)$ 整除，故能被 $(x-y)(y-z)(z-x)$ (因为这三个因子两两互素).令

$$g(x,y,z)=\frac{x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \tag{4}$$

易见 $g(x,y,z)$ 是 x,y,z 的对称多项式，而它是 1 次齐次的，故有常数 c 使得 $g(x,y,z)=c(x+y+z)$.代入 (4) 得

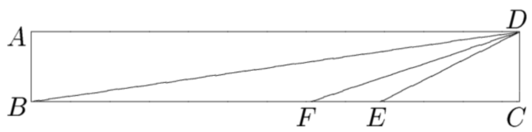
$$x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)=c(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \tag{5}$$

比较两边 x^3y 的系数可知 $c=1$，从而得到 (3).

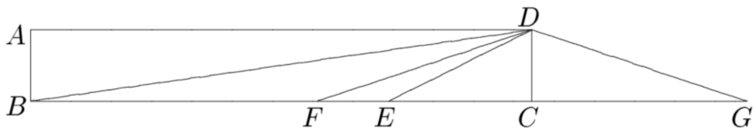
答案. 该多项式可分解为 $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$.

评分标准. 给出正确的分解 (因子可有次序或正负号的差别) 即可给满分；有正确的分解步骤但未得到最终的分解可给 15-20 分；仅有初步的尝试可给 5-10 分.

6. 如图，长方形 $ABCD$ 的边长 $BC=7AB$ ，E,F 为 BC 边上的点，$EC=2AB$ ，$FC=3AB$. 证明 $\angle DBC+\angle DFC=\angle DEC$.



证法一. 在 BC 的延长线上取点 G 使得 $CG=3AB$.



由 $CG=CF$ 可知 $\triangle DFG$ 是等腰三角形，$DF=DG$ ，$\angle DFC=\angle DGC$.由勾股定理不难算出 $DF=DG=\sqrt{10}AB$ ，注意 $BG=10AB$，$FE=AB$，故 $\frac{BG}{GD}=\sqrt{10}=\frac{DF}{FE}$.这说明 $\triangle BGD \backsimeq \triangle DFE$ ，从而 $\angle DBC=\angle EDF$. 故

$$\angle DEC=\angle ADE=\angle EDF+\angle ADF=\angle DBC+\angle DFC$$

证法二. 由所设有 $\tan\angle DBC=\frac{1}{7}$ ，$\tan\angle DFC=\frac{1}{3}$ ，$\tan\angle DEC=\frac{1}{2}$.由加法定理可得

$$\tan\angle DBC+\angle DFC=\frac{\tan\angle DBC+\tan\angle DFC}{1-\tan\angle DBC\tan\angle DFC}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

易见 $\angle DBC+\angle DFC<\frac{\pi}{2}$ ，故由 $\tan x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调性有 $\angle DBC+\angle DFC=\angle DEC$.

评分标准. 给出一个完整的证明即可给满分；如果做了实质性的推导但未能完成证明，或者

论证理由不充分, 可酌情给 10-20 分.

三、附加题（共 1 题, 10 分）

7. 将任意一个大于 0 的整数 n 输入到程序中，程序将按照以下步骤执行：
步骤 1：令 p 的值等于 0；
步骤 2：当 n 等于 0 时，跳转至步骤 3，否则令 b 的值等于 n 除以 10 的余数，将 p 的值加上 b，令 n 等于(n-b)÷10，重复执行步骤 2；
步骤 3：令 q 的值等于 p 除以 9 的余数，依次输出 p 和 q，结束整个程序；
现在向程序输入整数 3527594，请问程序输出 p 的值是_____，q 的值是_____.

解析. 这个程序是计算 n 的各位数字之和，以及它的各位数字之和除以 9 的余数. 在步骤 2 中，每次将 p 的值加上 n 的末位数字 b，“令 n 等于(n-b)÷10”实际上是将 n 的末位截断，因此从 n 的最低位开始，从右到左每一位的数字都将累加到 p，直到 n 变为 0。故输出的 p 为 n 的各位数字之和，q 为 n 的各位数字之和除以 9 的余数.

由输入的整数 3527594 不难算出其各位数字之和为 35, 而 35 除以 9 的余数为 8.

答案. 35，8

评分标准. 答对两个给 10 分. 答对其中一个给 5 分.