小高组科普测评题解答与评分标准

1. 设$A=\frac{21\times62+22\times63+23\times64+24\times65+25\times66}{21\times61+22\times62+23\times63+24\times64+25\times65}\times199$，求 A 的整数部分。

解. $A=\frac{21\times61+22\times62+23\times63+24\times64+25\times65+21+22+23+24+25}{21\times61+22\times62+23\times63+24\times64+25\times65}\times199$

$=(1+\frac{21+22+23+24+25}{21\times61+22\times62+23\times63+24\times64+25\times65})\times199$

因为 $\frac{21+22+23+24+25}{(21+22+23+24+25)\times65}<\frac{21+22+23+24+25}{21\times61+22\times62+23\times63+24\times64+25\times65}<\frac{21+22+23+24+25}{(21+22+23+24+25)\times61}$ ，

所以 $\left(1+\frac{1}{65}\right)\times199<A<(1+\frac{1}{61})\times199$ ，

即 $202+\frac{4}{65}<A<202+\frac{16}{61}$

所以 A 的整数部分为 202。

答案. A 的整数部分为 202。

评分标准. 化简算式 5 分; 做大小估计 10 分; 最终得到正确答案 10 分。中间过程的计算错误视具体情况扣分。

2. 若$20\times21\times22\times\cdots\times2020=26^k\times m$，$m$为整数，问整数$k$最大可以是多少？

解. 因为$26=2\times13$，要使$20\times21\times22\times\cdots\times2020=26^k\times m$中的$k$最大，由于因子 2 是足够多的，那么只需先求 1 到 2020 所含 13 的因数个数，然后从这个个数减去 1 就是 20 到 2020 所含 13 的因数个数。由于

$$\left[\frac{2020}{13}\right]=155,\ \left[\frac{2020}{13\times13}\right]=11,\ \left[\frac{2020}{13\times13\times13}\right]=0$$

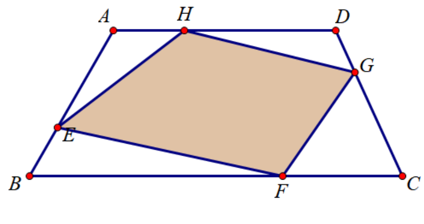
所以可知 20 到 2020 所含 13 的因数个数为

$$155+11-1=165$$

答案. 整数k最大可以是 165。

评分标准. 给出可行的方法 5 分; 计算因子 13 的重数 10 分; 最终得到正确答案 10 分。中间过程的计算错误视具体情况扣分。

3. 如图所示，在梯形 $ABCD$ 中，E,F,G,H 分别是 BA,CB,DC,AD上的三等分点。问阴影部分占梯形$ABCD$面积的比值是多少？



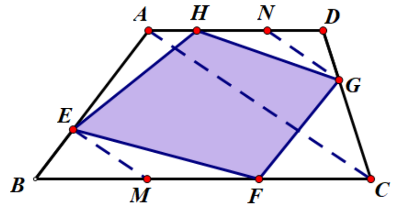
解. 如右图所示，分别作BC,DA的三等分点M,N，连接EM,GN，

则$S_{\Delta BEM}=\frac{1}{2}S_{\Delta EMF}=\frac{1}{9}S_{\Delta ABC}$，因此$S_{\Delta EMF}=\frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$，

同理，$S_{\Delta HDG}=\frac{2}{9}S_{\Delta ACD}$，$S_{\Delta AEH}=\frac{2}{9}S_{\Delta ABD}$，$S_{\Delta CFG}=\frac{2}{9}S_{\Delta BCD}$，

所以$S_{\Delta AEH}+S_{\Delta BEF}+S_{\Delta CFG}+S_{\Delta DHG}=\frac{4}{9}S_{四边形ABCD}$，

因此$S_{四边形EFHG}=\frac{5}{9}S_{四边形ABCD}$ 。



答案. 阴影部分占梯形$ABCD$面积的 $\frac{5}{9}$ 。

评分标准. 初步的尝试 5 分; 作出辅助线分解面积 15 分; 最终得到正确答案 5 分。中间过程的计算错误视具体情况扣至多 5 分。

4. 从 1 到 2020 的整数中不是 5 的倍数共有 1616 个，将这 1616 个数分成若干组(每组中的数的个数不一定相同)，使得每个组中任意两数的差（大数减去小数）都是质数，请问最少能分成多少组?

解法一. 题目问最少要多少组，则每组中的数字个数尽可能多，设最多数字的组的数字个数为k 。

首先能找到 4 个数：1，3，6，8. 故$k\geq 4$ 。

若$k\geq 5$，设这一组中的数为：$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<a_k$，分以下几种情况：

(1) 若a_1为奇数，a_2为奇数，则a_2-a_1必为偶数又为质数，故$a_2=a_1+2$，若a_3为奇数，则a_3-a_1为不小于 4 的偶数，即a_3-a_1为合数，矛盾，故a_3为偶数，a_4也只能为偶数且$a_4=a_3+2$.(i) 若a_5为奇数，则a_5-a_1为大于 2 的偶数，矛盾。 (ii) 若a_5为偶数，则a_5-a_3为大于 2 的偶数，矛盾。

(2)若a_1为奇数，a_2为偶数，则a_2-a_1必为奇数且$a_2-a_1\geq 3$.若a_3为奇数，则a_3-a_1为大于$a_2-a_1\geq 3$的偶数，必为合数，矛盾.故a_3为偶数，且故$a_3-a_2=2$ 。(i) 若a_4为奇数，则a_4-a_1为不小于 4 的偶数，必为合数，矛盾. (ii) 若a_4为偶数，则a_4-a_2为不小于 4 的偶数，必为合数，矛盾。

(3)若a_1为偶数，a_2为奇数，则a_2-a_1必为奇数且$a_2-a_1\geq 3$.若a_3为奇数，则$a_3-a_2=2$.(i) 若a_4为奇数，则a_4-a_2为不小于 4 的偶数，必为合数，矛盾。 (ii) 若a_4为偶数，则a_4-a_1为不小于 4 的偶数，必为合数，矛盾。

(4)若a_1为偶数，a_2为偶数，则$a_2-a_1=2$且a_3，a_4必为奇数。 (i) 若a_5为奇数，则$a_5-a_4=2$,于是$a_5-a_3>a_5-a_3=2$的偶数，矛盾。(ii) 若a_5为偶数，则$a_5-a_1>$

$a_2 - a_1 = 2$的偶数，矛盾。

综上分析，$k = 4$，即符合条件的分组中每一组最多有四个数，且每组中最小的两个数必为同奇或同偶。

可以发现{1，3，6，8}+10n, {2,4,7, 9}+10n($n = 0, 1, 2, \ldots, 201$)为一种分组，共有 404 组。

解法二. 若$k \geq 5$，利用抽屉原理，任取 5 个或以上不同的自然数，必有两个数的差为 4 的倍数，于是每组中最多只有 4 个数. 其它解答相同

答案. 至少能分成 404 组。

评分标准. 初步的分析 5 分; 分情况讨论 15 分; 最终得到正确答案 5 分。中间过程的分析错误视具体情况扣分。

5. 一本书有 2020 页，如果某页页码可以重组成 2 个以上（含 2 个）连续自然数，我们就称此页为“连续页”。 例如:“21”,“213”,“1324”,“9789”,“109”这些页码分别可以由“1，2,”,“1,2，3”,“1，2，3，4”,“97，98”,“9,10”构成，所以“21”,“213”,“1324”,“9789”,“109”是连续页，但“22”,“217”,“122”这些页码就不是连续页。这本书的“连续页”共有多少页？

解. ①10-99 中，连续页有$8 \times 2 + 1 = 17$；

②100-999 中，有连续页 102，120，201，210，109，910，901,190,及 123,234，. . .，789 的重排,共$7 \times 3! + 8 = 50$；

③1000-1999 中，有 4 位连续自然数构成的连续页是 1234，1023 的重排，共$3! + 3! = 12$,

④3 个连续自然数的构成的有 8，9,10，有 6 个；

⑤2 个 2 位连续自然数构成的有 10,11；11,12；12,13；. . .； 19,20；20,21；21,22；30,31；31,32；. . .；90,91；91,92；合计$17 \times 3 + 1 + 8 \times 6 = 100$页；

⑥2000-2020 中，连续页有 2013，2019 两种；

综上：共有 187 页。

答案. 这本书的“连续页”共有 187 页。

评分标准. 分情况分析 5 分; 对各种情形分别给出正确的页数 15 分; 最终得到正确答案 5 分。中间过程的计算错误视具体情况扣分。

6. 已知正整数a的约数个数为 15，正整数b的约数个数为 20，且$a+b$是完全平方数。问满足这些条件的$a+b$的最小值是多少？

解. 若一个整数是质数的幂, 例如 p^m , 则它的约数个数为 $m+1$; 若一个整数有两个不同的质因子, 例如 $p^m q^n$, 则它的约数个数为 $(m+1)(n+1)$, 等等。

由于$15=1\times15=3\times5$，可见或者$a=p^{14}$，或者$a=p^4q^2$（p,q均为a的质约数）

由于$20=1\times20=2\times10=4\times5=2\times2\times5$，可见$b=p^{19}$，或者$b=p^9q$，或者$b=p^4q^3$，或者$b=p^4qr$（$p,q,r$均为$b$的质约数）

若$a+b=p^{14}+p^{19}$，或者$a+b=p^{14}+p^9q$，或者$a+b=p^{14}+p^4q^3$，或者$a+b=p^{14}+p^4qr$，则$a+b\geq 2^{14}=16384$；

若$a+b=p^4q^2+p^9q$，则$a+b\geq 2^9\times3=1536$；

若$a+b=p^4q^2+p^4q^3$，则$a+b=p^4q^2(1+q)$，则要使$a+b$是完全平方数且最小，则$1+q$为完全平方数，当$q=3$时 $1+q=2^2$，此时 $a+b=576$；

若$a+b=p^4q^2+p^4qr$，则$a+b=p^4q(q+r)$，则要使$a+b$是完全平方数且最小，则$q+r=qc$，其中c为某一完全平方数，而c最小为2^2，此时$q+r$最小为$3\times4=12$，但此时$r=9$不是质数, 所以 $q+r$ 还要更大, 从而 $a+b>4p^4q^2\geq576$，即此时的最小值比 576 要大；

综上所述，满足条件的$a+b$的最小值是 576。

答案. 满足条件的$a+b$的最小值是 576。

评分标准. 分析a,b 的约数的可能情形 5 分; 对各种情形分别给出 $a+b$ 的最小可能值 15 分; 最终得到正确答案 5 分。中间过程的计算错误视具体情况扣分。