

## 2020 华数之星青少年数学大会数学水平测试

(初中一年级组)

(2020 年 8 月 1 日 10:00-11:30)

题号	1	2	3	4	5	6	总成绩
得分							
评阅人							

解答题(每题 25 分, 共 150 分)

1. 一个正整数可以写成如下形式的 3 的方幂的倍数和:  $a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_n \cdot 3^n$ , 其中

$0 \leq a_i < 3, a_n \neq 0, 0 \leq i \leq n$ , 都是非负整数. 例如  $12 = 3 + 3^2$  相当于  $n = 2, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1$ 。

(1) 证明不存在另外的  $m, b_0, b_1, \dots, b_m$  使得  $12 = b_0 + b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 3^2 + \dots + b_m \cdot 3^m$ 。

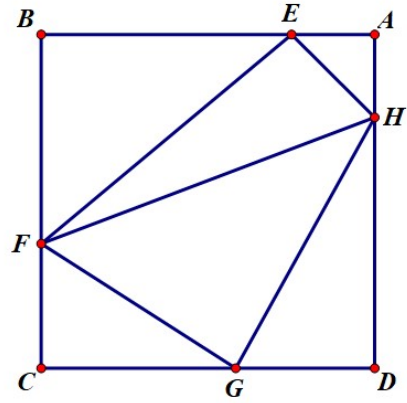
(2) 任意给定一个正整数  $a$ , 满足题目条件并且使得  $a = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + \dots + a_n \cdot 3^n$  的非负整数

$n, a_0, a_1, \dots, a_n$  是唯一确定的吗? 若是唯一的请证明, 若不是唯一的请举出反例。

2. 是否存在 22 个不是整数的有理数, 它们中任意两个的乘积都是整数? 若否定请证明, 若肯定请举例。

3. 有 4 个不同的质数  $a, b, c, d$ , 满足  $a + b + c + d$  是质数且  $a^2 + bc, a^2 + bd$  都是完全平方数, 求  $a + b + c + d$ 。

4. 已知正方形  $ABCD$  的边长为 8,  $E, F, G, H$  分别是边  $AB, BC, CD, DA$  上的点, 并且  $\triangle AEH, \triangle BEF, \triangle CFG, \triangle DGH$  的面积分别为 2, 15, 7, 10, 求  $\triangle EFH$  的面积。



5. 求满足方程  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$  的正整数组  $(x, y, z)$  的组数。

6. 平面上有按照 1 到  $n$  编号的  $n$  个点, 每个点都与另外  $k$  个点用线相连。对于一个点, 若与之相连的另外  $k$  个点的编号中, 有多于一半的编号小于这个点自身的编号, 那么这个点就称为“好点”。已知这  $n$  个点中恰有 5 个好点。问:  $n$  的最小值是多少?