# 初一组科普测评题解答与评分标准

1. 一个正整数可以写成如下形式的 3 的方幂的倍数和：$a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_n\cdot 3^n$，其中$0\le a_i<3, a_n\ne 0$，$0\le i\le n$，都是非负整数. 例如$12=3+3^2$相当于$n=2, a_0=0, a_1=1, a_2=1$。

(1) 证明不存在另外的$m$，$b_0$，$b_1$，...，$b_n$ 使得$12=b_0+b_1\cdot 3+b_2\cdot 3^2+\cdots+b_m\cdot 3^m$。

(2) 任意给定一个正整数 $a$，满足题目条件并且使得$a=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_n\cdot 3^n$的非负整数 $n$，$a_0$，$a_1$，...，$a_n$ 是唯一确定的吗？若是唯一的请证明，若不是唯一的请举出反例。

**解.** (1) 若有 $12=b_0+b_1\cdot 3+b_2\cdot 3^2+\cdots+b_m\cdot 3^m$，则 $m<3$，否则 $m\ge 3$，$b_m\cdot 3^m\ge 3^3>12$，矛盾. 同样 $m<2$，得矛盾. 必有 $m=2$，接着得到 $b_2=1, b_1=1, b_0=0$。

(2) 若有$a=a_0+a_1\cdot 3+a_2\cdot 3^2+\cdots+a_n\cdot 3^n=b_0+b_1\cdot 3+b_2\cdot 3^2+\cdots+b_n\cdot 3^n$，得

$$0=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)\cdot 3+(a_2-b_2)\cdot 3^2+\cdots+(a_n-b_n)\cdot 3^n$$

注意到$0\le a_i, b_i\le 2$，所以$0\le |a_i-b_i|\le 2$，

$$|(a_0-b_0)+(a_1-b_1)\cdot 3+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})\cdot 3^{n-1}|\le 2\cdot(1+3+\cdots+3^{n-1})=2\cdot\frac{3^n-1}{2}=3^n-1<3^n$$

若$a_n-b_n\ne 0$，不妨设$a_n>b_n$，则

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)\cdot 3+\cdots+(a_n-b_n)\cdot 3^n\ge 3^n-|(a_0-b_0)+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})\cdot 3^{n-1}|>1$$

矛盾。所以$a_n-b_n=0$，$a_n=b_n$，消去 $a_n-b_n$ 并重复上面的讨论，最终可得到 $a_i=b_i$ 对所有 $i$ 成立。这说明满足条件的表达式是唯一确定的。 **证毕。**

**评分标准.** 完成 (1) 的证明 10 分; 对 (2) 给出肯定的回答 5 分; 完成 (2) 的证明 10 分。证明由缺陷视具体情况扣分。

2. 是否存在 22 个不是整数的有理数，它们中任意两个的乘积都是整数？若否定请证明，若肯定请举例。

**解.** 答案是肯定的，下面是一个例子。

因为质数有无限多个，我们可以任选 22 个两两不同的质数，$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{21}, p_{22}$. 构造 22 个有理数如下：

$$x_1 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_1^2}, x_2 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_2^2}, \ldots, x_k = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_k \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_k^2}, \ldots,$$

$$x_{21} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_{21}^2}, x_{22} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_{22}^2}.$$ **…………(10 分)**

注意 $x_i$ 的分母中有质数 $p_i$ 的平方，而分子的质因数中只有$p_i$ 的一次幂，故在约分成为最简分数后分母为 $p_i$ 。由此可见 $x_1, x_2, \ldots, x_{22}$ 因都不是整数且两两不同。另一方面，其中任意两个数的乘积 ($i \neq j$)：

$$x_i \cdot x_j = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_j \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_i^2} \cdot \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_j \cdot \ldots \cdot p_{22}}{p_j^2}$$

$$= \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_i^2 \cdot \ldots \cdot p_j^2 \cdot \ldots \cdot p_{22}^2}{p_i^2 p_j^2} = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots p_{i-1}^2 \cdot p_{i+1}^2 \cdot \ldots \cdot p_{j-1}^2 \cdot p_{j+1}^2 \cdot \ldots \cdot p_{22}^2.$$

是整数。

**答.** 存在 22 个不是整数的有理数，它们中任意两个的乘积都是整数。

**评分标准.** 给出肯定的回答 5 分；给出例子 10 分；证明例子满足所有条件 10 分。证明不完整视具体情况扣分。

3. 有 4 个不同的质数$a,b,c,d$，满足$a+b+c+d$是质数且$a^2+bc$, $a^2+bd$都是完全平方数，求$a+b+c+d$。

**解.** 由$a+b+c+d$是质数可知$a,b,c,d$中有 2 (否则 $a+b+c+d$ 是大于 2 的偶数，不可能是质数)。如果$a \neq 2$，那么$b,c,d$中有 2，从而$a^2+bc$, $a^2+bd$中有一个模 4 余 3，不可能是平方数。故由所设可知 $a=2$。

设$2^2+bc=m^2$，则 $bc=(m-2)(m+2)$。如果$m-2=1$，那么$m=3$，$bc=3$ 不是平方数，与所设不符。故$b=m-2, c=m+2$或者$b=m+2, c=m-2$, 不管是哪种

情况，总有$b-c=\pm4$。

同理$b-d=\pm4$。故$\{a,b,c,d\}=\{a,b-4,b,b+4\}$。

注意 $b-4,b,b+4$中必有一个是3的倍数，又是质数，所以只能是$b-4=3$。

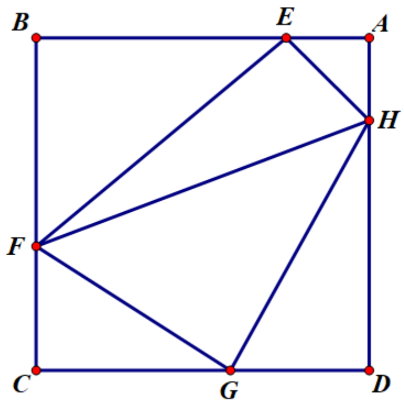
从而 $p=7$, $p+4=11$, 都是质数; 而 $a^2+bc$ 与 $a^2+bd$ 中有一个等于 25, 另一个等于 81, 均为平方数; 且 $a+b+c+d$ =2+3+7+11=23 是质数, 均符合题设。

**答案.** $a+b+c+d$ =23。

**评分标准.** 确定 $a=2$ 给 5 分; 得到 $\{a,b,c,d\}=\{a,b-4,b,b+4\}$ 给 10 分; 进一步推导 $b,c,d$ 的值 5 分; 得到最终答案 5 分。推导过程不完整或有错视具体情况扣分。

4. 已知正方形$ABCD$的边长为 8，$E,F,G,H$分别是边$AB,BC,CD,DA$上的点，

并且$\Delta AEH,\Delta BEF,\Delta CFG,\Delta DGH$的面积分别为$2,15,7,10$，求$\Delta EFH$的面积。




**解.** 设$AE=x,AH=y$，那么$xy=4$，

且$BE=8-x,DH=8-y$， $BF=\dfrac{30}{8-x},DG=\dfrac{20}{8-y}$， $CF=\dfrac{34-8x}{8-x},CG=\dfrac{44-8y}{8-y}$，

因此有$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{34-8x}{8-x}\cdot\dfrac{44-8y}{8-y}=7$， $(34-8x)\cdot(22-4y)=7(8-x)(8-y)$， 展开得

$748-176x-136y+32xy=448-56x-56y+7xy$，化简并把$xy=4$代入得

$3x+2y=10$，

通过代入消元或者韦达定理，解方程组$\begin{cases}3x+2y=10\\ xy=4\end{cases}$得，$\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ y=3\end{cases}$

① $AH=y=2$时，$BF=5$，$S_{\Delta EFH}=\dfrac{1}{2}\times(2+5)\times8-2-15=11$

② $AH=y=3$时，$BF=\dfrac{9}{2}$，$S_{\Delta EFH}=\dfrac{1}{2}\times(3+\dfrac{9}{2})\times8-2-15=13$

**答案.** $\Delta EFH$ 的面积是 11 或 13。

**评分标准.** 设定适当的变元并由此表达其他的量 5 分; 得到变元满足的方程 5 分; 解方程 10 分; 得到最终答案 5 分。推导过程中有错视具体情况扣分。

5. 求满足方程$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}$的正整数组$(x,y,z)$的组数。

**解.** 由于$x,y,z$都是正整数. 不妨设$x\le y\le z$, 则$\dfrac{3}{x}\ge\dfrac{3}{4}$，$2\le x\le4$。

$x=4$时，$\begin{cases}x=4\\ y=4\\ z=4\end{cases}$，1 组解。

$x=3$时，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}$，$3\le y<\dfrac{24}{5}$=4.8，

$\begin{cases}x=3\\ y=3\\ z=12\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\ y=4\\ z=6\end{cases}$，取消大小顺序限制后，共 9 组解。

$x=2$时，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$，$yz=4y+4z$，$(y-4)(z-4)=16$，$y-4=1,2,4$，

$\begin{cases}x=2\\ y=5\\ z=20\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\ y=6\\ z=12\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\ y=8\\ z=8\end{cases}$, 取消大小顺序限制后，共 15 组解。

共 25 组解。

**答案.** 共 25 组。

**评分标准.** 分析得到最小变元的可能情形 5 分; 分析其他变元的各种情形 15 分;得到最终答案 5 分。分析过程中有错视具体情况扣分。

**6.** 平面上有按照 1 到$n$编号的$n$个点，每个点都与另外$k$个点用线相连。对于一个点，若与之相连的另外$k$个点的编号中，有多于一半的编号小于这个点自身的编号，那么这个点就称为“好点”。已知这$n$个点中恰有 5 个好点。问:$n$的最小值是多少？

**解.** 每条直线段，都称之为编号较大的点向编号较小的点发出的“好线”。

每个好点，发出的“好线”条数不小于$\left[\frac{k}{2}\right]+1$ ($[x]$表示不大于$x$的最大整数)。编号为$n$的点发出的线段都是好线，其他 4 个好点发出的好线的条数$\geq 4\times\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)\geq 4\times\frac{k+1}{2}=2k+2$。由于 5 个好点发出的好线的条数小于所有的连线总数$\frac{nk}{2}$，所以$k+$ $2k+2<\frac{nk}{2}$，即$4<k(n-6)$。

设好点中最小编号为 $m$，则编号为$1,2,\cdots,m-1$的点都不是好点，而非好点的总数是$n-5$，所以$m-1\leq n-5$。

此外，第 $m$ 号点最多只能发出 $m-1$ 条好线，因此

$\left[\frac{k}{2}\right]+1\leq m-1\leq n-5$，$\frac{k+1}{2}\leq\left[\frac{k}{2}\right]+1\leq n-5$，$k\leq 2n-11$。

由$4<k(n-6),k\leq 2n-11$，有$4<(2n-11)(n-6)$，得到$n\geq 8$。

下面例子说明，$n=8$是可以达到的。

设$n=8$，取$k=3$，下表中的 * 号表示行数和列数所对应的两点间有连线(无* 号表示无连线)。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | * | * | * | | |
| 2 | | | | * | * | | | * |
| 3 | | | | * | | | * | * |
| 4 | * | * | * | | | | | |
| 5 | * | * | | | | * | | |
| 6 | * | | | | * | | * | |
| 7 | | | * | | | * | | * |
| 8 | | * | * | | | | * | |

不难看到，编号为 4,5,6,7,8 的点是好点。

**答案.** $n$的最小值是 8。

**评分标准.** 分析得到 $n$ 所满足的条件 5 分；得到 $n\geq 8$ 给 10 分；给出满足 $n=8$ 的例子 (并最终确定$n$的最小值) 10 分。