

## 2020 华数之星青少年数学大会数学水平测试

(初中二年级组)

(2020 年 8 月 1 日 10:00-11:30)

题号	1	2	3	4	5	6	总成绩
得分							
评阅人							

解答题(每题 25 分, 共 150 分)

1. 求一个 6 次整系数多项式  $f(x)$ , 使得  $f(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$ 。2. 设四个有理数  $a, b, c, d$  满足  $3a^2 + 3b^2 = c^2 + d^2$ 。证明  $a = b = c = d = 0$ 。

3. 求方程组

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 10 & (1) \\ 3x^2y - y^3 = 9\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

的实数解。

4. 对于一个实数  $x$ , 记  $[x]$  为不超过  $x$  的最大的整数,  $\{x\} = x - [x]$ 。设  $p$  是一个质数。设

三个实数  $a, b, c$  满足  $\{ab\} = \{bc\} = \{ca\} = \frac{1}{p}$ 。证明这三个实数都是无理数。

5. 有一把三位密码锁, 每位数字只有 0, 1, 2, 3, 4。主人当初设了个密码, 但后来忘记了, 需要通过试开找回密码。所幸由于密码锁已旧了, 只需有两位数字对上 (但不知是哪两位) 就能开启。求最小的整数  $n$ , 使得主人只需试开不超过  $n$  次就能保证打开。并请设计一种试开方法, 能保证主人试开不超过  $n$  次就能打开 (须解释设计原理)。

6. 设四边形  $ABCD$  的边  $BA, CD$  的延长线交于点  $P$ ,  $M, N$  分别为对角线  $AC, BD$  中

的点, 满足  $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BD} = a$ 。证明比值  $r = \frac{S_{\triangle PMN}}{S_{ABCD}}$  由  $a$  唯一决定, 并给出  $r$  的表达式。

