初二组科普测评题解答与评分标准

1. 求一个 6 次整系数多项式 $f(x)$, 使得 $f(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$。

解法一. 令 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, 则

$$\alpha-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3} \qquad (1)$$

两边取立方得

$$\alpha^3-3\alpha^2\sqrt{2}+6\alpha-2\sqrt{2}=3 \qquad (2)$$

由此得

$$\alpha^3+6\alpha-3=(3\alpha^2+2)\sqrt{2} \qquad (3)$$

两边平方得

$$(\alpha^3+6\alpha-3)^2=2(3\alpha^2+2)^2 \qquad (4)$$

展开合并同类项得

$$\alpha^6-6\alpha^4-6\alpha^3+12\alpha^2-36\alpha+1=0 \qquad (5)$$

由 (5) 可见取 $f(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$ 即可。

解法二. 令 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, 则

$$\alpha-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3} \qquad (1)$$

由此得

$$(\alpha-\sqrt{2})^3-3=0 \qquad (2)$$

令 $g(x)=(x-\sqrt{2})^3-3$, 则由 (2) 有 $g(\alpha)=0$。令 $f(x)=g(x)((x+\sqrt{2})^3-3)$, 则也有 $f(\alpha)=0$, 而

$$\begin{aligned} f(x)&=((x-\sqrt{2})^3-3)((x+\sqrt{2})^3-3)\\ &=(x^2-2)^3+9-6(x^3+6x)\\ &=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1 \end{aligned}$$

注. 若要求 $f(x)$ 的首项系数为 1 则答案是唯一的。

评分标准. 能够消掉一个根号得到关于 α 的仅含一个根号的关系式, 给 5 分; 消掉第二个根号得到不含根号的关系式, 给 5 分; 整理 (合并同类项) 得到 α 满足的多项式方程给 10 分; 得出所求的多项式给 5 分。解题过程中出现计算错误视具体情况扣分。

2. 设四个有理数 a,b,c,d 满足 $3a^2+3b^2=c^2+d^2$。证明 $a=b=c=d=0$。

证法一. 用反证法，设有不全为零的 a,b,c,d 满足 $3a^2+3b^2=c^2+d^2$。对 a,b,c,d 都乘以它们的公分母，可约化为 a,b,c,d 都是整数的情形；约去它们的公因子，可约化为 a,b,c,d 没有大于 1 的公因子的情形。

注意 a,b 两个数有三种可能：或者 a,b 都是偶数，则 $3a^2+3b^2$ 是 4 的倍数；或者 a,b 中一个是偶数另一个是奇数，则 $3a^2+3b^2$ 模 4 余 3；或者 a,b 都是奇数，则 $3a^2+3b^2$ 模 8 余 6。类似地 c,d 两个数有三种可能：或者 c,d 都是偶数，则 c^2+d^2 是 4 的倍数；或者 c,d 中一个是偶数另一个是奇数，则 c^2+d^2 模 4 余 1；或者 c,d 都是奇数，则 c^2+d^2 模 8 余 2。由 $3a^2+3b^2=c^2+d^2$ 可见，只有 a,b 都是偶数且 c,d 都是偶数的情形是可能的，但这与 a,b,c,d 没有大于 1 的公因子矛盾。 **证毕。**

证法二. 仍用反证法，并如证法一那样约化为 a,b,c,d 都是整数且没有大于 1 的公因子的情形。

注意若一个整数 t 不是 3 的倍数，则 $t\equiv\pm1 \pmod 3$，故 $t^2\equiv 1 \pmod 3$。若 c,d 两个数中有一个或两个不是 3 的倍数，则 c^2+d^2 模 3 余 1 或 2，但由 $3a^2+3b^2=c^2+d^2$ 可见 c^2+d^2 是 3 的倍数，故这不可能发生， 换言之只能是 c,d 都是 3 的倍数。设 $c=3m$，$d=3n$，则由 $3a^2+3b^2=c^2+d^2$ 得 $a^2+b^2=3(m^2+n^2)$，与上面同样的理由可见 a,b 也都是 3 的倍数，这就与 a,b,c,d 没有大于 1 的公因子矛盾。 **证毕。**

评分标准. 初步的想法可给 5 分；给出证明的一种思路给 5 分；证明关键点给 10 分；完成证明给 5 分。

3. 求方程组

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=10 & (1) \\ 3x^2y-y^3=9\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

的实数解。

解. $(1)^2+(2)^2$ 得

$$(x^2+y^2)^3=343=7^3$$

所以

$$x^2+y^2=7$$

将 $y^2=7-x^2$ 代入 (1)，整理得

$$4x^3-21x-10=0$$

分解因式得

$$(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)=0$$

由此得到 x 的三个可能的值

$$x=-2,-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}$$

相应地

$$y=\sqrt{3},-\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(得出 y^2 后，需代入 (2) 确定 y ，避免开方出现符号分歧)。代入原方程组可验证所得的三组数均使方程组成立。故原方程组共有三组实数解

$$(x,y)=\left(-2,\sqrt{3}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right),\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

注. 本题的来源涉及复数。利用复数不难做如下解答。

记 i 为虚单位。由 $(1)+i(2)$ 得

$$i(x+iy)^3=10+9\sqrt{3}i=(-2+\sqrt{3}i)^3 \qquad (3)$$

再由 $(1)-i(2)$ 得

$$i(x-iy)^3=10-9\sqrt{3}i=(-2-\sqrt{3}i)^3 \qquad (4)$$

由 (3), (4) 得

$$x+iy=(-2+\sqrt{3}i)\omega^m \quad (0\le m\le 2),\qquad x-iy=(-2-\sqrt{3}i)\omega^n \quad (0\le n\le 2)$$

其中 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (为 3 次本原单位根)。由此即可得到方程组的全部 9 组复数解, 其中实数解对应于 $(m,n)=(0,0),(1,2),(2,1)$ 的三个情形。

评分标准. 得到立方式并开立方给 5 分; 约化为一元方程给 5 分; 解出一元 (3 次) 方程给 10 分; 得到最终结果给 5 分。解题过程中出现计算错误视具体情况扣分。

4. 对于一个实数 x, 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大的整数，$\{x\}=x-[x]$。设 p 是一个质数。设三个实数 a,b,c 满足 $\{ab\}=\{bc\}=\{ca\}=\frac{1}{p}$ 。证明这三个实数都是无理数。

证法一. 由所设可知存在整数x,y,z 使得 $bc=x+\frac{1}{p},ca=y+\frac{1}{p},ab=z+\frac{1}{p}$,

如果我们能设法证明abc是无理数，问题就结束了. 这是因为$a=\frac{abc}{bc}=\frac{abc}{x+\frac{1}{p}}$, 是无理数，同理，对于$b,c$也是如此。注意

$$(abc)^2=(x+\tfrac{1}{p})(y+\tfrac{1}{p})(z+\tfrac{1}{p})$$

即

$$p(pabc)^2=(px+1)(py+1)(pz+1)$$

$pabc=\frac{m}{n}$, 其中m,n 是整数, $n>0$, $(m,n)=1$, 则 $p|(px+1)(py+1)(pz+1)n^2$，这说明 $p|n^2$，再由 p 是质数可见 $p|n$ 。而 $pm^2=(px+1)(py+1)(pz+1)n^2$, 因此 $p|m$，这与m,n互质矛盾。 **证毕。**

证法二. 易见任一非零有理数 r 可以唯一的表示为

$$r=\frac{m}{n}p^s \qquad (1)$$

其中m,n,s为整数，$n>0,m,n$互素且都不能被p整除。为了方便起称s为r的$p-$指数。由（1）可见r^2表示为

$$r^2=\frac{m^2}{n^2p^2} \qquad (2)$$

特别的，r^2的$p-$指数为$2s$。

由所设存在的整数x,y,z使得

$$ab=x+\frac{1}{p},bc=y+\frac{1}{p},ca=z+\frac{1}{p} \qquad (3)$$

由（3）可得

$$a^2=\frac{ab\cdot ba}{bc}=\frac{\left(x+\frac{1}{p}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{p}\right)}{y+\frac{1}{p}}=\frac{(px+1)\cdot(pz+1)}{py+1}p^{-1}$$

故a^2为有理数。注意到$px+1,py+1,pz+1$都不能被p−整除，可见a^2 的p−指数为-1。由此可见a是无理数，因为若a是有理数，则由上述a^2 的p−指数为偶数，不可能为-1。同理b,c也都是无理数。 **证毕。**

评分标准. 初步的想法可给 5 分; 给出证明的一种思路给 5 分; 证明关键点给 10 分; 完成证明给 5 分。

5. 有一把三位密码锁, 每位数字只有 0, 1, 2, 3, 4。主人当初设了个密码, 但后来忘记了, 需要通过试开找回密码。所幸由于密码锁已旧了, 只需有两位数字对上 (但不知是哪两位) 就能开启。求最小的整数 n, 使得主人只需试开不超过 n 次就能保证打开。并请设计一种试开方法, 能保证主人试开不超过 n 次就能打开 (须解释设计原理)。

解. 由于任两个数位共有 5 ×5=25 种可能的组合, 至少需要允许试开 25 次才能保证打开。下面说明可以设计一种试开方法, 使得试开不超过 25 次就能保证打开, 换言之 $n=25$。

为方便起见将这个设计问题改述如下。给出 25 个三元整数组 (a,b,c) $(0\le a,b,c\le 4)$, 满足下列条件:

(∗) 对任一整数对 (p,q) $(0\le p,q\le 4)$, 存在整数 r_1,r_2,r_3 $(0\le r_1,r_2,r_3\le 4)$, 使得 (r_1,p,q), (p,r_2,q), (p,q,r_3) 都在这 25 个三元数组中。

满足 (∗) 的三元数组很多, 下面举一个例子。

对任意两个整数 a,b $(0\le a,b\le 4)$, 令

$$\mathrm{c}=\begin{cases}a+b & \text{若 } a+b<5\\ a+b-5 & \text{若 } a+b\ge 5\end{cases}\qquad(1)$$

注意 c 由 a,b 唯一决定, 故这样定义的三元数组 (a,b,c) 共有 25 个。我们来证明这 25 个三元数组满足 (∗)。

由 (1) 可见若 $p=a$, $q=b$ 则取 $r_3=c$ 即可; 若 $p=a$, $q=c$, 令

$$r_2=\begin{cases}c-a & \text{若 } c\ge a\\ c+5-a & \text{若 } c<a\end{cases}\qquad(2)$$

则由 (1) 可见 (p,r_2,q) 在所取的 25 个三元数组中; 类似地, 若 $p=b$, $q=c$, 令

$$r_3=\begin{cases}c-b & \text{若 } c\ge b\\ c+5-b & \text{若 } c<b\end{cases}\qquad(3)$$

则由 (1) 可见 (r_1,p,q) 在所取的 25 个三元数组中。

注. 用抽象代数的语言, 这个问题可改述为给出 $\mathbb{F}_5^3$ (5 元域上的 3 维线性空间) 中的一个 25 元子集 S, 满足条件

(∗) 对任意 $(p,q)\in\mathbb{F}_5$, 存在 $r_1,r_2,r_3\in\mathbb{F}_5$ 使得 (r_1,p,q), (p,r_2,q), $(p,q,r_3)\in S$。

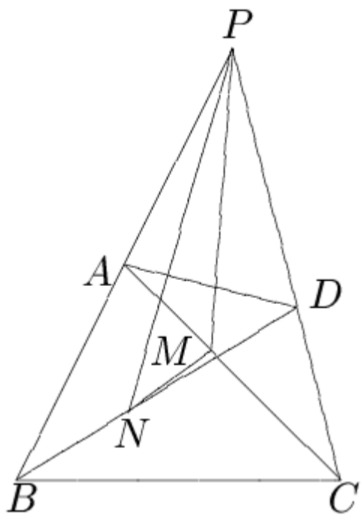
上面的例子是取 $S=\{(a,b,c)\in\mathbb{F}_5^3|c=a+b\}$。更一般地可取 S 为 $\mathbb{F}_5^3$ 中的平面

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$$

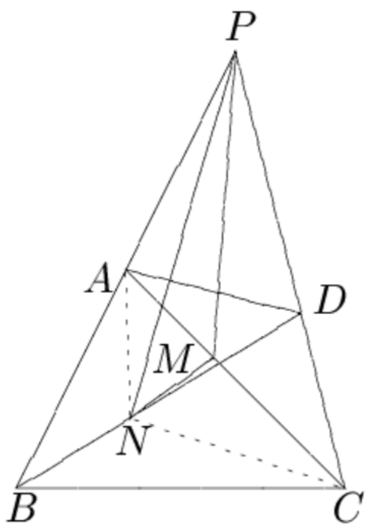
其中 $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$。例如可取 $S=\{(a,b,c)\in\mathbb{F}_5^3|a+b+c=0\}$ 或 $S=\{(a,b,c)\in\mathbb{F}_5^3|a+b=c+1\}$。

评分标准. 说明 (证明) $n\geq 25$ 给 5 分; 断言 $n=25$ 给 5 分; 设计出一种解决方案给 10 分 (若方案有缺陷, 视其可否修复而决定扣分值); 给出设计原理给 5 分。

6. 设四边形 $ABCD$ 的边 BA, CD 的延长线交于点 P, M,N 分别为对角线 AC, BD 中的点, 满足 $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BD}=a$。证明比值 $r=\frac{S_{\Delta PMN}}{S_{ABCD}}$ 由 a 唯一决定, 并给出 r 的表达式。



解. 连结 AN, NC, 如图。



由图中可见

$$S_{\Delta PNC}=(1-a)\,S_{\Delta PBC} \tag{1}$$

$$S_{\Delta PMC} = (1-a)\, S_{\Delta PAC} \qquad (2)$$
$$S_{\Delta ANC} = (1-a) S_{ABCD} - S_{\Delta ACD} \qquad (3)$$
从而由图及 (3) 可见

$$S_{\Delta NMC} = (1-a) S_{\Delta ANC} = (1-a)\big((1-a)S_{ABCD} - S_{\Delta ACD}\big) = (1-a)^2 S_{ABCD} - (1-a) S_{\Delta ACD} \quad (4)$$

再由图及 (1), (2), (4) 得

$$\begin{aligned} S_{\Delta PNM} &= S_{\Delta PNC} - S_{\Delta PMC} - S_{\Delta NMC} \\ &= (1-a)S_{\Delta PBC} - (1-a)S_{\Delta PAC} - (1-a)^2 S_{ABCD} + (1-a) S_{\Delta ACD} \\ &= (1-a)(S_{\Delta PBC} - S_{\Delta PAC} + S_{\Delta ACD}) - (1-a)^2 S_{ABCD} \\ &= (1-a) S_{ABCD} - (1-a)^2 S_{ABCD} = a(1-a) S_{ABCD} \end{aligned}$$

由此得

$$r = \frac{S_{\Delta PMN}}{S_{ABCD}} = a(1-a)$$

由 a 唯一决定。

注. 上面的解法关键的想法是先将 $S_{\Delta PMN}$ 用 P, A, B, C, D 诸点组成的三角形的面积及 a 表达，从而摆脱 M, N。想到这一点，剩下的就不难了。

本题的原始想法很简单。注意 $\overrightarrow{PM} = a\overrightarrow{PA} + (1-a)\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PN} = a\overrightarrow{PB} + (1-a)\overrightarrow{PD}$，故

$$S_{\Delta PNM} = \left\|\overrightarrow{PN} \times \overrightarrow{PM}\right\| = a(1-a)\|\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PD}\|$$

但

$$\|\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PD}\| = S_{\Delta PBC} - S_{\Delta PAD} = S_{ABCD}$$

故 $r = a(1-a)$。

评分标准. 尝试面积分解可给 5 分；得出非平凡的面积关系可给 5 分；得到关键的 (可导致问题最终解决的) 面积关系给 10 分；得到所求的公式给 5 分。