善德基金會2021 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽（決賽）

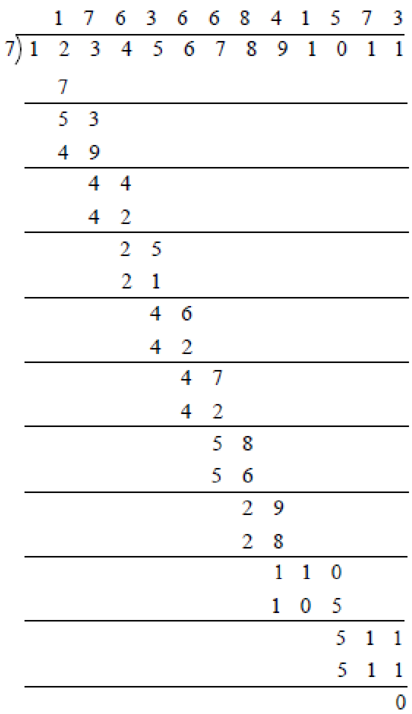
小中組答案

一、　填空题

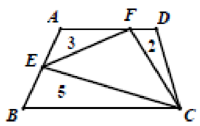
1　从 1 开始，把自然数依次排列得到一个数串，例如从 1 写到 12 得到的 123456789101112, 每写一个自然数, 把自然数的所有数字都写出来. 如果第一次遇到写出的数串对应的数刚好是7 的倍数, 问最后写的是第（　）个自然数.

答案：11

解答：列除法竖式：



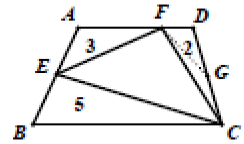
2　如右图所示的梯形 $ABCD$ 中, 已知点 E 是腰 AB 上的中点, 图中对应三角形的面积分别为 2、3、5, 则梯形面积是（　）.



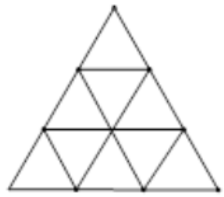
答案：18.

解答：设上底长是 $2a$，下底长是 $2b$，高是 $2h$．

$2S_{\Delta BCE}=10=2bh, 8=2ah$，所以．$S_{梯形ABCD}=(2a+2b)h=18$．



3 右图是一个由边长为1的9个等边三角形构成的边长为3的等边三角形，图中共含有（　　）个轴对称的四边形．



答案：27 个．

解答：图中对称的四边形有菱形和等腰梯形．

菱形：边长为 1 的 9 个．

等腰梯形：包含 3 个边长为1的等边三角形等的腰梯形有 12 个．包含 5 个边长为1的等边三角形的等腰梯形有 3 个．包含 8 个边长为1的等边三角形等腰梯形有 3 个，共有12 + 3+ 3 =18 个．

二、解答题

4 把一些盒子摆成一圈，从某个盒子 A 开始，首先在 A 中放一颗红球，沿着顺时针方向，每隔4 个盒子放一颗红球，直到再一次在 A 中放一个红球．然后在 A 中放一颗绿球，沿着逆时针方向，每隔6 个盒子放一颗绿球，直到再一次在 A 中放一个绿球停止．最后，共有 11 盒子中同时有红球与绿球，问盒子数目可能有多少？

答案：11，55，77 或 385

解答：根据题目设定，每隔 4 个盒子放一颗红球，相当于每次数 5 个盒子放一个红球．同样，每次数 7 个盒子放一个绿球．因为盒子摆成一圈，可以循环数盒子．因为5 与7 都是质数，当盒子的数目不是5 或7 的倍数时，再一次在盒子 A 放球时，数的盒子数刚好是 5 或者 7 的整数倍．因此，如果盒子数目不是 5 的倍数，则每个盒子都会放一个红球，并且除盒子 A 放两个红球，其它盒子只放一个红球．如果盒子数目不是 7 的倍数，则每个盒子都会放一个绿球，并且除盒子 A 放两个绿球，其它盒子只放一个绿球．

情况 1：当盒子数目既不是 5 的倍数, 也不是 7 的倍数, 则每个盒子都有红球与绿球. 题目中要求共有 11 个盒子同时有红球与绿球, 此时有 11 个盒子.

情况 2：当盒子数目不是 5 的倍数, 是 7 的倍数, 则每个盒子都有红球. 题目中要求共有 11 个盒子同时有红球与绿球, 此时有 77 个盒子.

情况 3：当盒子数目是 5 的倍数, 不是 7 的倍数, 则每个盒子都有绿球. 题目中要求共有 11 个盒子同时有红球与绿球, 此时有 55 个盒子.

情况 4：当盒子数目是 5 的倍数, 也是 7 的倍数, 因为 5 与 7 的最小公倍数是 35. 题目中要求共有 11 个盒子同时有红球与绿球, 此时有 385 个盒子.

5. 一个首位数字为 6 五位数a,它去掉首位数字后得到一个四位数b. 五位数a除以四位数b 得到的商是一位数,余数为 3. 求这个五位数a.

答案： 68571

解答：令q 为a 除以b 得到的商. 首先注意若q 为奇数,则无论a 的个位数是奇数还是偶数,余数都是偶数,与条件不符. 故q 必为偶数. 其次,若a 的个位数是偶数, 则余数必为偶数,与条件不符. 故a 的个位数必为奇数.

试算a的个位数与q的各种可能,得到只有三种可能：$q=2$, a的个位数为 7；$q=4$, a的个位数为 9； $q=8$, a的个位数为 1；.由此可以逐步推导a的各位数字. 例如对$q=8$的情形, a的十位数字减去它的 8 倍（不管百位数字）须为 1,由此可见它只能是 7；百位数字减去它的 8 倍（不管千位数字）须为 0,由此可见它只能是 5；千位数字减去它的 8 倍须为 4,由此可见它只能是 8, 故$b=8571$,从而$a=68571$. 同样的推导可得其它两个解分别是 19997 和 39999. 所以满足题目要求的数是 68571.

6. 右图为一个 3×3 的正方形格子, 每个格中填入一个非零自然数,每一行左边的数均是右边的数的约数,且小于右边的数,每一列上边的数均是下边的数的约数,且小于下边的数. 如果左上格中填入的数为 1, 右下格中填入的数为 36,

如下图.

1		
		36

问满足上述要求的正整数的填法有多少种?

答案：44

解答 1：因为题目中要求约数关系,先看看可能的约数有哪些.

中间格点上的数都是36 的约数. $36=2\times2\times3\times3$,其可能的约数为 1,2,3,4,6,9,12,18,36.

1	G	F
H	O	C
E	D	36

从左往右,从下向下中间经过 3 个格子. 这样要求 5 个数从小到大满足约数关系,可能的 5 个数有下面几种：

1,2,4,12,36

1,2,6,12,36

1,2,6,18,36

1,3,6,12,36,

1,3,6,18,36,

1,3,9,18,36

情况 1: 当O 点的数为 4 时, C, D 的数只能是 12, E, F 的数可以是4 或6 , G, H 的数只能是 2. 有 4 种摆的方法.

情况 2: 当O 点的数为 9 时, C, D 的数只能是 18, E, F 的数可以是6 或9 , G, H 的数只能是 3. 有 4 种摆的方法.

情况 3：当O 点的数为 6 时, C, D 的数可是 12 或 18.

情况 3.1： $C(, D)$ 的数是 12 时, $F(, E)$ 的数可以是4 或6 .

$F(, E)$ 的数是4 . $G(, H)$ 的数只能是 2. 这种情况下有 1 种摆的方法.

$F(, E)$ 的数是6 . $G(, H)$ 的数可以是2 或3. 这种情况下有2 种摆的方法.

情况 3.2： $C(, D)$ 的数是 18 时, $F(, E)$ 的数可以是9 或6 .

$F(,E)$ 的数是9 . $G(,H)$ 的数只能是 3. 这种情况下有 1 种摆的方法.

$F(,E)$ 的数是6 . $G(,H)$ 的数可以是2 或3. 这种情况下有2 种摆的方法.

C 的数是 12, D 的数是 12,共有 1+2+2+4=9 种摆放方式.

C 的数是 12, D 的数是 18,共有$3\times3=9$种摆放方式.

C 的数是 18, D 的数是 12,共有$3\times3=9$种摆放方式.

C 的数是 18, D 的数是 18,共有 1+2+2+4=9 种摆放方式.

综上,共有 4+4+9+9+9+9=44 种摆放方式

解答 2： 首先注意 36 为四个质因数的积, 按照要求, 中间一格填的数比 1 至少多两个质因数, 但比 36 至少少两个质因数, 故只能恰有两个质因数. 这说明中间一格只能填 4,6 或 9. 若中间格填 4, 则其上方和左方的格都只能填 2, 下方和右方的格都只能填 12, 剩下的两个格只能填 4 或 6, 共有 4 种填法; 同理若中间格填 9 也共有 4 种填法. 以下考虑中间格填 6 的情形. 若中间格的上方为 2 右方为 18, 则右上角格只能为 6; 同理若中间格的上方为 3 右方为 12, 则右上角格只能为 6; 而若中间格的上方为 2 右方为 12, 或中间格的上方为 3 右方为 18, 则右上角格有两种可能的选择. 由此可见右上三格共有 6 种可能的选择; 同理左下三格共有 6 种可能的选择, 所以中间格填 6 的情形共有 6×6=36 种填法. 由此得总共有 4+4+36=44 种填法.

附加題

7. 將任意兩個正整數 m 和 n 依次輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟1：令 p 的值等於0；

步驟2：當 n 等於 0 時，跳轉至步驟3；否則，將 p 的值加上 m，將 n 的值減去 1，重新執行步驟2；

步驟3：輸出 p，結束整個程式。

現在將整數 14 和 6 依次輸入到程式中，程式輸出 p 的值是<u>84</u>。