善德基金會2021 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽（決賽）

小高組答案

一、填空题

1．如果一个正整数不等于一个整数的平方，则称为“非平方数”．将所有非平方数按从小到大的次序排列，则第2021个非平方数是______．

答案： 2066．

解答： 由于$44^2=1936<2021<2025=45^2$，则小于2021的平方数共有44个，那么2021是第$2021-44=1977$个非平方数．大于2021的第一个平方数是2025，第二个是$2116>2021+45=2066$，故在2021至2066之间只有一个平方数，从而2066是第$1977+44=2021$个平方数．

2．如图1所示，在任意四边形$ABCD$中，E，F为AD的三等分点，G，H为BC的三等分点，AH分别交BF，DG于P，N两点，CE分别交BF，DG于M，Q两点．若四边形$ABCD$面积为180，四边形$MPNQ$的面积为10，则阴影部分面积为______．

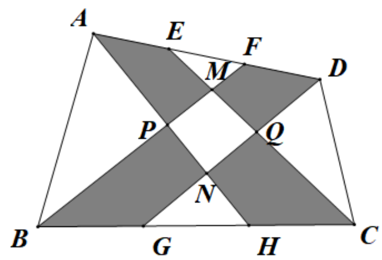
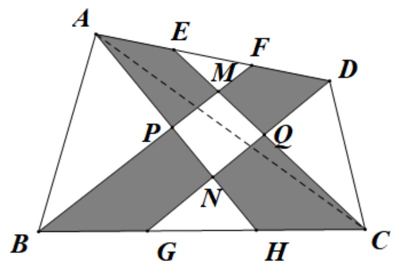


图 1

答案：100．



解答：连接AC，则$S_{\Delta ACH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$，$S_{\Delta ACE}=\frac{1}{3}S_{\Delta ACD}$. 因此$S_{四边形AHCE}=\frac{1}{3}(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD})$

$=\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$；

同理可得$S_{四边形FBGD}=\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}$，所以$S_{阴}=\frac{2}{3}S_{四边形ABCD}-2S_{四边形MPNQ}=100$.

3．小朋友稼轩与爸爸爬大屿山和登木鱼峰．爬到A位置，爸爸说已经爬过了石级总数的$\frac{1}{8}$．又爬过了若干个石级到达B位置，爸爸说已经爬过了石级总数的$\frac{1}{6}$．又爬过了若干个石级到达C位置，爸爸说已经爬过了石级总数的$\frac{1}{4}$．聪明细心的稼轩发现，从起点到A位置的石级阶数，以及A到B，B到C的石级阶数，三个数都是数字重复的两位数（即个位和十位数字一样的两位数），于是稼轩很快计算出从木鱼峰山脚到山峰石级总数为______.

答案：264

解答：注意到石级阶数是正整数，且从起点到A位置的石级阶数，以及A到B，B到C的石级阶数，三个数全都是数字重复的两位数.

因为$A-B$占总阶数的$\frac{1}{24}$，又数字重复的两位数均为 11 的倍数，所以总阶数的$\frac{1}{24}$也为 11 的倍数，即总阶数为$24\times11=264$的倍数，总阶数可能为$264, 528, 792, \cdots$.

但$264\times3\times\frac{1}{8}=99$，接下来 264 的倍数的$\frac{1}{8}$不是两位数，即后面的数皆不符合题意.

另外起点到A占总阶数的$\frac{1}{8}$，$B-C$占总阶数的$\frac{1}{12}$．经检验，264 符合题意.

二、解答题

4．计算$1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2+9^2-10^2-11^2+12^2-13^2+14^2+15^2-16^2+\cdots$

$+2017^2-2018^2-2019^2+2020^2$.

答案：4.

解答：解法一：因为$1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2=0$,

$$9^2-10^2-11^2+12^2-13^2+14^2+15^2-16^2=0\cdots$$

观察发现上述计算每 8 个一组和为 0，又 $2020 \equiv 4 \bmod (8)$

即原式＝$2020^2 - 2019^2 - 2018^2 + 2017^2 = 4039 - 4035 = 4.$

解法二：观察每 4 个数据为一组进行计算，发现每组求和为$4, -4, 4, -4, \cdots, 4$

又由于$2020 \equiv 4 \bmod (8)$，即原式$= 2020^2 - 2019^2 - 2018^2 + 2017^2 = 4039 - 4035 = 4.$

5．大于 3 的自然数n可以写成三个非 0 的自然数之和，$n = a + b + c$．按照a，b，c的排列次序，三个加数不完全相同的相加方法，就认为是不同的加法．例如：$4 = 1 + 1 + 2$，$4 = 1 + 2 + 1$就是 2 种的不同的相加方法．若自然数n有 105 种相加方法，请问n是多少？

答案： $n = 16.$

解答：n个球排成一行，相邻两球之间有 1 个间隔，则它们之间共有$n-1$个间隔．将 2 个隔板插入其中 2 个间隔中，将一行球分成 3 段，最左边一段有a个球，中间一段有b个球，最右边的一段有c个球．这样一来，我们建立了自然数n的相加方法和 2 个隔板插入间隔的插入方法的一一对应关系．而$n-1$个间隔差 2 个隔板的插入方法有$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$种，所以$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = 105$，解得$n = 16.$

6．从$1, 3, 5, 7, 9$中任取四个不同数码，组成第一个四位数；将第一个四位数的数码倒序排列，得到第二个四位数；将第一个与第二个四位数中较大者减去较小者，得到第三个四位数；将第三个四位数的数码倒序排列，得到第四个四位数．若将第三个与第四个四位数相加，它们的和是否为固定值？如果是，请计算出固定值；如果不是，请说明理由．

答案：是固定值，定值为10890或9999．

证明：设第一个四位数为$\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$，不妨设$a > d$，

当$b > c$时两数之差为

$$(a-d) \times 1000 + (b-1-c) \times 100 + (10+c-1-b) \times 10 + (10+d-a),$$

第四个数为

$$(10+d-a) \times 1000 + (10+c-1-b) \times 100 + (b-1-c) \times 10 + (a-d),$$

最后两数之和为

$$(a-d+10+d-a)\times 1000+(b-1-c+10+c-1-b)\times 100+(10+c-1-b+b-1-c)\times 10$$
$$+(10+d-a+a-d)=10000+800+80+10=10890.$$

当$b<c$时两数之差为

$$(a-1-d)\times 1000+(10+b-c)\times 100+(c-1-b)\times 10+(10+d-a),$$

注意到数码的取值范围保证了$a-1-d>0$，第四个数为

$$(10+d-a)\times 1000+(c-1-b)\times 100+(10+b-c)\times 10+(a-1-d),$$

最后两数之和为

$$(a-1-d+10+d-a)\times 1000+(10+b-c+c-1-b)\times 100+(c-1-b+10+b-c)\times 10$$
$$+(d-a+a-1-d)=9000+900+90+9=9999.$$

附加题

7. 將任意兩個正整數 *m* 和 *n* 依次輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟 1：令 *p* 的值等於 0；

步驟 2：當 *n* 等於 0 時，跳轉至步驟 3；否則，將 *p* 的值加上 *m*，將 *n* 的值減去 1，重新執行步驟 2；

步驟 3：輸出 *p*，結束整個程式。

現在將整數 14 和 6 依次輸入到程式中，程式輸出 *p* 的值是 <u>84</u>。