善德基金會2021 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽（決賽）

中一組答案

一、填空题

1. 甲从 A 地出发向正东方行走，速度为 4 千米/小时；与此同时，乙从 A 地正西方 2 千米的 B 地骑车追甲，速度为 8 千米/小时；一只狗也和乙同时出发追甲，速度为 10 千米/小时；狗追上甲后立刻掉头向乙奔跑，遇到乙之后再立即掉头追甲，……，直到乙追上甲为止. 请问，在此期间狗向东奔跑的总时间是____分钟.

答案：27

解答：乙追上甲，总共花费 $\frac{2}{8-4}=0.5$ 小时，朝东骑了 4 千米；此期间狗总共跑了 5 千米，狗朝东跑的路程比朝西跑的路程多出 4 千米，朝西跑的路程为 $\frac{5-4}{2}=0.5$ 千米，朝东跑的路程为4.5千米，花的时间为 $\frac{4.5}{10}=0.45$ 小时. 27 分钟.

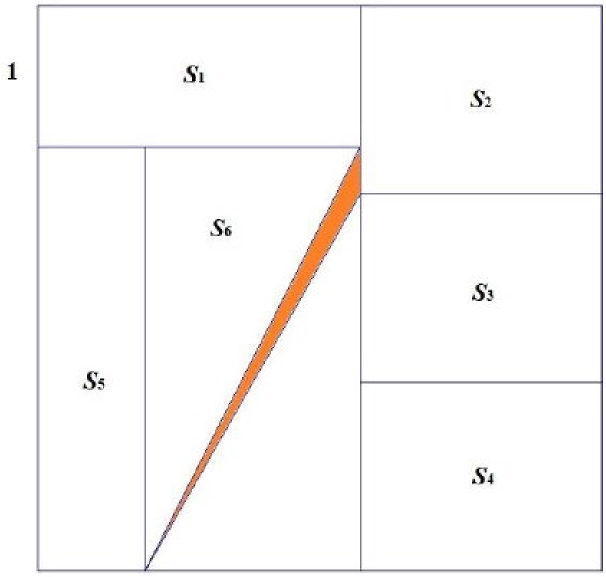
解答二：

设狗向东奔跑的总时间为 x 小时，狗向西奔跑的总时间为 y 小时. 那么

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{8-4} \\ 10(x-y)=\dfrac{2\times 8}{8-4} \end{cases}$$

解得 $x=0.45$，所以狗向东奔跑 0.45 小时, 27 分钟.

2. 如下图，一个正方形被分成若干个部分，其中 $S_1, S_2, \ldots, S_6$ 的面积彼此相等，S_1, $S_2, \ldots, S_5$ 都是矩形，S_6 是三角形，S_1 的一条边长为 1. 那么 S_6 面积是图中阴影部分的面积的__________倍.



答案：9.

解答：设正方形边长为a，S_1 的另一边为 b，则 S_2,S_3,S_4 的面积为 $\frac{a}{3}(a-b)=b\times 1=b$，有$a^2=b(a+3), b=\frac{a^2}{a+3}$.

S_5的宽为 $\frac{b}{a-1}=\frac{a^2}{(a+3)(a-1)}$，$S_6$的宽为$b-\frac{a^2}{(a+3)(a-1)}=\frac{(a-2)a^2}{(a+3)(a-1)}$.

S_6的面积为 $\frac{a-1}{2}\times\frac{(a-2)a^2}{(a+3)(a-1)}=\frac{(a-2)a^2}{2(a+3)}$，得到 $\frac{(a-2)a^2}{2(a+3)}=\frac{a^2}{a+3}, a=4$.

S_6的面积为 $\frac{a^2}{a+3}=\frac{16}{7}$.

阴影部分的底为$a-1-\frac{2a}{3}=\frac{a-3}{3}=\frac{1}{3}$，高为 $\frac{(a-2)a^2}{(a+3)(a-1)}=\frac{32}{21}$，

面积为 $\frac{(a-2)a^2}{(a+3)(a-1)}\times\frac{a-3}{6}=\frac{(a-2)(a-3)a^2}{6(a+3)(a-1)}=\frac{16}{63}$.

因此S_6的面积为阴影部分面积的 9 倍.

解答二：设阴影部分的底为 x，则S_2的高为 $x+1$.

记S_1的另一边为b， S_5的宽与 S_6的宽之和为b，而$S_5+2S_6=3S_1$，

所以 S_5的高为S_1的高的 3 倍，为 3，于是$3(x+1)=1+3, x=\frac{1}{3}$.

于是阴影部分面积比 S_6的面积为 $x:3=1:9$.

3. 有同学设计了正八面体的华数之星折纸艺术品．从上向下看，是图 1“华数之星”4 个字；从下向上看，是图 2“少年活动”4 个字；从左往右看，是图 3“华之活少”4 个字.

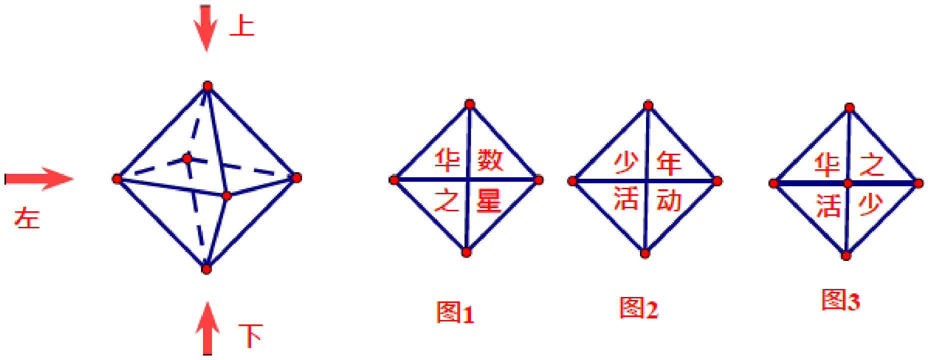
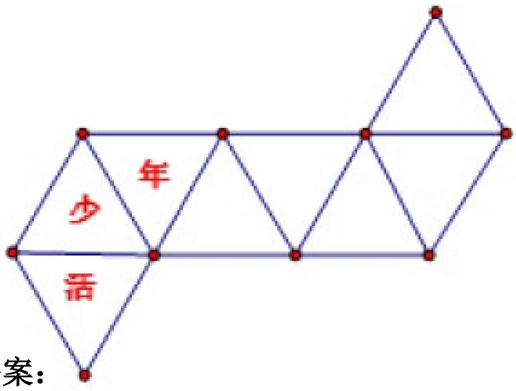
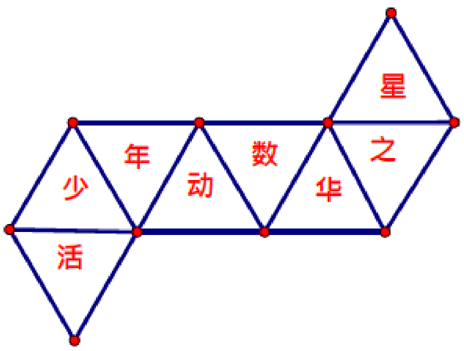


图1 图2 图3

下图是正八面体的展开图，请在展开图中相应的位置写上正确的汉字，五个字从左到右，最后是上面，依次为____，___，___，___，___.



答案：



评分标准：每个三角形中的字，5 分.

解答：除了正确看三视图外，展开图中的连接很重要，四个小片的公共点是个考察依据.

二、解答题

4. 设 $P(x)=ax^2+bx+c$，并且当$k=2,3,4$时，都有 $P(k)=\frac{1}{k}$，求$a+b+c$.

答案：$\frac{3}{4}$.

解答 1：令$Q(x)=xP(x)-1$，则$Q(x)$是三次多项式，且$Q(k)=0$（$k=2,3,4$）.

因此，$Q(x)=a(x-2)(x-3)(x-4)$，

而$-1=Q(0)=a(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)=-24a$，所以$a=\frac{1}{24}$.

因此 $a+b+c=P(1)=Q(1)+1=\frac{-1}{24}\times 3!+1=\frac{3}{4}$.

解答 2：也可以直接求解a,b,c，计算略繁.

把$k=2,3,4$代入多项式得方程组

$$\begin{cases}4a+2b+c=\frac{1}{2}\\ 9a+3b+c=\frac{1}{3}\\ 16a+4b+c=\frac{1}{4}\end{cases}，\text{通过消元解得}\begin{cases}a=\frac{1}{24}\\ b=\frac{-3}{8}\\ c=\frac{13}{12}\end{cases}$$

$a+b+c=\frac{3}{4}$.

注：推广到一般n，答案总是$\frac{n-1}{n}$

评分标准：答案对即得 15 分. 第一种方法，写出多项式得 5 分；得出常数得 5 分；最后数值得 5 分. 第二种方法，写出方程得 5 分；得出三个未知数中两个值得 5 分；得出三个未知数的值得 8 分；最后计算 2 分.

5. 已知正整数 m,n 满足$m>n$，证明以下面三个数$m^2-n^2, 2mn-n^2, m^2-mn+n^2$为边长，可以构成一个整数边长的三角形；如果这样的三角形还是等腰三角形，求它的顶角的度数.

解答：只要证明两边之和大于第三边，

$(m^2-n^2)+(2mn-n^2)-(m^2-mn+n^2)=3mn-3n^2=3n(m-n)>0$，

$(m^2-n^2)+(m^2-mn+n^2)-(2mn-n^2)=2m^2-3mn+n^2=(m-n)(2m-n)>0$，

$(2mn-n^2)+(m^2-mn+n^2)-(m^2-n^2)=mn+n^2>0$.

若为等腰三角形，则

或 $m^2-n^2=2mn-n^2$ ，得到 $m=2n$ ；

或 $m^2-n^2=m^2-mn+n^2$ ，得到 $m=2n$ ；

或 $2mn-n^2=m^2-mn+n^2$ ，得到 $m^2-3mn+2n^2=0,(m-n)(m-2n)=0$ ， $m=2n$.

所以相应的三角形都是等边三角形. 顶角为 60 度.

评分标准：证明三角形得 10 分，求顶角得 5 分. 其中证明三角形时，证明中只要三条中两条对，得 10 分；想到要讨论两边之和大于第三边，得 5 分. 求顶角时，证明出等腰三角形条件，即可得 5 分.

6. 任给 10 个相邻的正整数，设最前 4 个的乘积为 A ，最后 4 个的乘积为 B ，中间两个的和为 C . 证明 $B-A$ 是 C 的倍数.

证明：由于首尾两数的和为 C ，设前 4 个数为 a,b,c,d ，则最后 4 个数为

$C-d, C-c, C-b, C-$ ， 有

$B-A=(C-a)(C-b)(C-c)(C-d)-abcd$

$=C^4-(a+b+c+d)C^3+(ab+bc+cd+ad)C^2-(abc+abd+bcd+acd)C$

为 C 的倍数.

证明二：设前 10 个数为 $m-4,m-3,m-2,m-1,m,m+1,m+2,m+3,m+4,m+5$ ，

则 $A=(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)$ ， $B=(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)$ ， $C=2m+1$ ，

$B-A=(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)-(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)$

$=(m^2+7m)^2+22(m^2+7m)+120-(m^2-5m)^2-10(m^2-5m)-24$

$=24m^3+36m^2+204m+96=(2m+1)(12m^2+12m+96)$

为 C 的倍数.

评分标准：表述出 A,B,C 关系得 10 分，证明出结果得 5 分

附加题

7. 將任意一個四位正整數 n 輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟1：令 m 的值等於 n 除以 100 的商；

步驟2：將 n 的值減去 m 的 100 倍；

步驟3：輸出 m 和 n，結束程式。

現在將正整數 1009 輸入到程式中，請問程式輸出 m 的值是<u>10</u>，n 的值是<u>9</u>。