

善德基金會 2021 年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽（決賽）

中二組試卷

日期：2021 年 5 月 15 日

一小時三十分鐘完卷（上午 10:00 至上午 11:30）

比賽須知：

1. 全卷共 7 題，包括填空題 3 道，每題 25 分；解答題 3 道，每題 25 分；附加題 1 道 10 分。
2. 參賽學生必須全部作答，所有答案寫在答題紙上。
3. 填空題及附加題無需書寫步驟，只須填寫答案；解答題要求寫出詳細過程。
4. 比賽時使用自備文具，例如鉛筆、原子筆及橡皮擦膠等。不准使用計算器。違規者將被取消比賽資格。
5. 完卷後收回所有試題、答題紙及草稿紙。
6. 參賽學生在本試卷和答題紙上填寫以下資料：座位編號、學生姓名及學校名稱。
(可依照參賽資格確認信列印的資料填寫)

座位編號	學生姓名	學校名稱

填空题(共三题, 每题 25 分, 共 75 分)

1. 已知两个实数 a, b 使得方程 $x^3 - ax^2 + 2027x - b = 0$ 的根为三个连续的正整数。

求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 设 a 为实数, 使得 x, y, z 的多项式

$$f(x, y, z) = 2x^2 + (a + 1)xy + 3y^2 + 7xz + (2a - 1)yz + 6z^2$$

能分解为两个 1 次多项式的积。求 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 图 1 为 5×5 的方格表, 每格中填有一个数字。

1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

图 1

对此表可以这样操作: 对其中两个相邻的格中的数同时加 1 或同时减 1, 为一次操作。经过若干次操作后, 图 1 变为图 2。

0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	x	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

图 2

求其中的 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答題(共三題, 每題 25 分, 共 75 分)

4. 將 $2021!$ 分解為質因數的積, 證明其中質因數 7 的指數 (即重數) 等於

$$\left[\frac{2021}{7} \right] + \left[\frac{2021}{7^2} \right] + \left[\frac{2021}{7^3} \right]$$

(符號 $[a]$ 表示實數 a 的整數部分, 即不超過 a 的最大整數), 並計算得數。

5. 求下列方程組

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 16 \\ 7x + 8y + 9z = 22 \end{cases}$$

的所有解。

6. 設凸五邊形 $ABCDE$ 的五個內角都相等。證明五邊形 $ABCDE$ 中任一點到各邊的距離之和等於定值。

附加題(共一題，10分)

7. 將任意一個四位正整數 n 輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟 1：令 m 的值等於 n 除以 100 的商；

步驟 2：將 n 的值減去 m 的 100 倍；

步驟 3：輸出 m 和 n ，結束程式。

現在將正整數 1009 輸入到程式中，請問程式輸出 m 的值是_____， n 的值是_____。

全卷完