善德基金會2021年香港華羅庚金杯少年數學邀請賽（決賽）

中二組答案

一、填空题

1. 已知两个实数 a, b 使得方程 $x^3 - ax^2 + 2027x - b = 0$ 的根为三个连续的正整数。求a, b。解. 设方程 $x^3 - ax^2 + 2027x - b =$ 的三个根分别为 $n-1, n, n+1$。则

$$2027 = (n-1)n + n(n+1) + (n+1)(n-1) = 3n^2 - 1$$

由此得 $n^2 = 676, n = 26$。从而 $a = (n-1) + n + (n+1) = 3n = 78, b = (n-1)n(n+1) = 17550$。

答案. 78, 17550。

注. 题类: 代数方程, 题型: 填空题, 难度: 低难。

评分标准. 填对一个数给 15 分; 填对两个数给 25 分。

2. 设 a 为实数, 使得 x, y, z 的多项式

$$f(x, y, z) = 2x^2 + (a+1)xy + 3y^2 + 7xz + (2a-1)yz + 6z^2$$

能分解为两个 1 次多项式的积。求 a 的值。

解. 由 $f(x, y, z)$ 能分解为两个 1 次多项式的积可见 $f(x, 0, z)$ 能分解为 x, z 的两个 1 次多项式的积, 而

$$f(x, 0, z) = 2x^2 + 7xz + 6z^2 = (2x+3z)(x+2z)$$

注意 $f(x,y,z)$ 是齐次的, 其因子也是齐次的, 故可设 $f(x,y,z)$ 分解为 $(2x+by+3z)(x+cy+2z)$。由

$$2x^2 + (a+1)xy + 3y^2 + 7xz + (2a-1)yz + 6z^2 = (2x+by+3z)(x+cy+2z)$$

比较两边的系数得

$$b + 2c = a + 1, bc = 3, 2b + 3c = 2a - 1$$

由此可得 $c = 3, b = 1$, 从而 $a = 6$。代入 $f(x, y, z)$ 的表达式可见分解 $f(x, y, z) = 2x^2 + 7xy + 3y^2 + 7xz + 11yz + 6z^2 = (2x+y+3z)(x+3y+2z)$ 成立。

答案. 6 。

注. 题类: 因式分解, 题型: 填空题, 难度: 中难。

3. 图 1 为 5 ×5 的方格表, 每格中填有一个数字。对此表可以这样操作: 对其中两个相邻的格中的数同时加 1 或同时减 1, 为一次操作。经过若干次操作后, 图 1 变为形如图 2。问其中的 x 等千多少?

1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

图 1

0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	x	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

图 2

解. 我们将相邻的两格分别染上黑白色, 如图 3。由千每次操作都是将相邻两格中的数同时加 1 或减 1, 所有黑格的数之和与所有白格的数之和的差保持不变。在图 1 中, 所有黑格的数之和与所有白格的数之和的差 (就是其中 1 的个数) 等千 13, 所以在图 2 中, 所有黑格的数之和与所有白格的数之和的差也等千 13。但易见在图 2 中, 所有黑格的数之和与所有白格的数之和的差等千 $x-12$, 故 $x-12=13$, $x=25$。

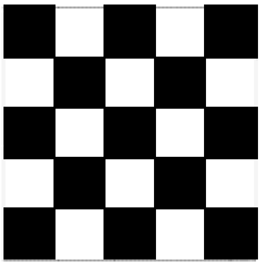

图 3

答案. 25。

注. 题类: 组合, 题型: 填空题, 难度: 中难。

由图 1 出发经过操作得到图 2 是可能的。例如可以将 25 个格排成一条龙, 使得龙中相邻的两格在图 1 中是相邻的, 且龙中最后一格为图 1 的中心格; 然后将龙中第 1, 2 两格同时减 1, 再将龙中第 2, 3 两格同时加 2, 再将龙中第 3, 4 两格同时减 3, 再将龙中第 4, 5 两格同时加 4, 等等, 直至最后将龙中第 24, 25 格同时加 24。

二、解答题

4. 将2021! 分解为质因数的积, 证明其中质因数 7 的指数 (即重数) 为

$$[\frac{2021}{7}]+[\frac{2021}{7^2}]+[\frac{2021}{7^3}]=334$$

证. 在从 1 到 2021 的所有整数中, 7 的倍数有 $[\frac{2021}{7}]$ 个, 7^2 的倍数有 $[\frac{2021}{7^2}]$ 个, ..., 一般地, 7^n 的倍数有 $[\frac{2021}{7^n}]$ 个。注意对任一 n 有

$$[\frac{2021}{7^{n+1}}]=\left[\frac{[\frac{2021}{7^n}]}{7}\right]$$

而 $7^4=2401>2021$, 故质因数 7 的重数共有

$$[\frac{2021}{7}]+[\frac{2021}{7^2}]+[\frac{2021}{7^3}]=288+41+5=334$$

注. 题类: 数论, 题型: 证明题, 难度: 低难。

评分标准. 给出一个完整的证明即可给满分; 如果做了实质性的推导但未能完成证明, 或者论证理由不充分, 可酌情给 10-20 分。

5. 求下列方程组

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 4x+5y+6z=16 \\ 7x+8y+9z=22 \end{cases}$$

的所有解。

解. 由第二个方程减第一个方程得

$$3x+3y+3z=6 \tag{1}$$

注意第二个方程加 (1) 恰为第三个方程, 可见第三个方程是多余的。由 (1) 得

$$x+y+z=2 \tag{2}$$

再由第一个方程减 (2) 得

$$y+2z=8 \tag{3}$$

故 $y=8-2z$, 代入 (2) 得 $x=z-6$。

答案. 原方程组有无穷多组解, 一般的解公式为 $x=z-6$, $y=8-2z$。注. 题类:

线性方程, 题型: 解答题, 难度: 平凡。

评分标准. 给出一个正确的通解公式即可给满分; 若说明了有无穷多组解但未能给出正确的通解公式, 可酌情给 10-20 分; 若做了实质性的推导但未能给出正确的断言, 可酌情给 5-10 分; 若仅给出特解 (无论多少个) 可给 5 分。

6. 设凸五边形 $ABCDE$ 的五个内角都相等。证明五边形 $ABCDE$ 中任一点到各边的距离之和等千定值。

证. 作一个大的正五边形 $A'B'C'D'E'$ 包含五边形 $ABCDE$ 在其中, 使得 $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$, $E'A' \parallel EA$, 且五边形 $ABCDE$ 中任一点到五边形 $A'B'C'D'E'$ 的任一边的垂线的垂足都在该边之内。记 a,b,c,d,e 分别为 AB 与 $A'B'$ 的距离, BC 与 $B'C'$ 的距离, CD 与 $C'D'$ 的距离, DE 与 $D'E'$ 的距离, EA 与 $E'A'$ 的距离。若五边形 $ABCDE$ 中的一点 P 与五边形 $ABCDE$ 的各边的距离之和为 h, 则它与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的各边的距离之和为 $h'=h+a+b+c+d+e$。另一方面, 若 l 为正五边形 $A'B'C'D'E'$ 的边长, S 为正五边形 $A'B'C'D'E'$ 的面积, 则有 $S=h'l/2$, 从而 $h'=\frac{2S}{l}$ 为定值。这说明 h 也是定值。

注. 题类: 几何, 题型: 证明题, 难度: 中难。

评分标准. 给出一个完整的证明即可给满分; 如果做了实质性的推导但未能完成证明, 或者论证理由不允分, 可酌情给 10-20 分。

附加題

7. 將任意一個四位正整數 n 輸入到程式中，程式將按照以下步驟執行：

步驟1：令 m 的值等於 n 除以 100 的商；

步驟2：將 n 的值減去 m 的 100 倍；

步驟3：輸出 m 和 n，結束程式。

現在將正整數 1009 輸入到程式中，請問程式輸出 m 的值是<u>10</u>，n 的值是<u>9</u>。